El sistema carece de soluciones y es incompatible.

En la resolución de los sistemas de los apartados a) y c) hemos activado la opción ► Frac que se encuentra en el menú *Matemáticas* (tecla MATH), para obtener los elementos de las matrices expresados en forma de fracción.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 58

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = -1$ e) $\begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 - 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1$

Desarrollamos los determinantes, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 34x^2 + 225 = 0 \, .$

Las soluciones son x = - 5, x = - 3, x = 3 y x = 5.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x = 0.$

Las soluciones son x = - 1, x = 0 y x = 1.

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad 3 - x = -1.$

La solución es x = 4.

4. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Las razones en cada caso son:

a) Las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 3 \cdot F_1$.

b) Las columnas primera y tercera coinciden: $C_1 = C_3$.

c) La columna tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

d) La fila tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $F_3 = 3 \cdot FC_1 + F_2$.

5. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

a) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 2 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \dot{2}$$

b) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 3 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{3}$$

c) Realizamos la siguiente operación con las columnas ($C_3 + C_2 - 2 \cdot C_1 \rightarrow C_3$), sacamos factor común 7 de la tercera columna y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{7}$$

d) Puede observarse que los números que forman cada una de las filas, 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados a la tercera columna, quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} \; 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix} = \dot{11}$$

6. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicamos y dividimos la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión $\frac{1}{abc}$ fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante es nulo al tener dos columnas iguales.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & 1 \\ abc & b^2 & 1 \\ abc & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es det (F_1, F_2, F_3) = 5. Calcula:

a) det (2A) **b) det (A^3)** **c) det ($3F_1 - F_3$, $2F_3$, F_2)**

a) Teniendo en cuenta la propiedad:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

y que el orden es 3:

$$\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40.$$

b) Teniendo en cuenta la propiedad:
El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

Obtenemos:

$$\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

c) Teniendo en cuenta las propiedades:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = 2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3)$$

Haciendo uso de la propiedad:
Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3) = -2 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -6 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -30$$

8. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla det (A).

a) Utilizando la propiedad $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene: $\det(A^2) = [\det(A)]^2$. Por tanto:

$$[\det(A)]^2 - \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) \cdot [\det(A) - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(A) = 0 \\ \quad o \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det(A) = \det(A^t)$ y $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene:

$$\det(A \cdot A') = \det(I) \quad \Rightarrow \quad \det(A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(A) = -1 \\ \quad 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

9. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2 y F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $-F_1$?

La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\,|A| = -8.$$

10. Comprueba que el determinante que sigue es divisible por 5, sin calcularlo, a partir de las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Sustituimos los elementos de la fila tercera por la suma de los elementos de las filas tercera y segunda, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Observamos que el determinante es divisible por 5.

Existen otras formas de combinar líneas de este determinante para obtener número múltiplos de 5, por ejemplo, la suma de los elementos de la columna tercera con el doble de los elementos de la columna segunda.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 59

11. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31}, si existen.

b) Calcula, si existen, los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31}, si existen.

c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

Las respuestas son:

a) Los menores complementarios pedidos son:
En la matriz A: $\alpha_{12} = 0$; $\alpha_{22} = 2$; α_{23} y α_{31} no existen.

En la matriz B: $\alpha_{12} = 4$; $\alpha_{22} = -12$; $\alpha_{23} = -8$ y $\alpha_{31} = -16$.

En la matriz C: $\alpha_{12} = -6$; $\alpha_{22} = -3$; $\alpha_{23} = 6$ y $\alpha_{31} = 1$.

b) Los adjuntos pedidos son:

En la matriz A: $A_{12} = 0$; $A_{22} = 2$; A_{23} y A_{31} no existen.

En la matriz B: $B_{12} = -4$; $B_{22} = -12$; $B_{23} = 8$ y $B_{31} = -16$.

En la matriz C: $C_{12} = 6$; $C_{22} = -3$; $C_{23} = -6$ y $C_{31} = 1$.

c) Las matrices adjuntas son:

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -20 \\ 6 & -12 & 8 \\ -16 & -2 & -10 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Las matrices adjuntas son:

a) $Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $Adj\ (B) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 19 \\ 20 & -13 & -5 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ c) $Adj\ (C) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Las matrices inversas de las matrices del enunciado son:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

■ 14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$**, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando a = 2.**

El determinante de la matriz A es det (A) = $-a^2 + 4a - 3 = -(a-1)(a-3)$.

La matriz no tiene inversa para a = 1 o a = 3.

La matriz para a = 2 es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene que:

- Si a = 0, el rango de A es 2.
- Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.**

La matriz B^2 es $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz M = A^2 - A^t es $M = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de M es det (M) = (a – 2) (2a – 1) y los valores del rango son:

- Si a ≠ 2 y a ≠ 1/2, el rango de M es 3.
- Si a = 2, el rango de B es 2.
- Si a = 1/2, el rango de B es 2.

17. Determina para qué valores de a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **es 3.**

El determinante de la matriz A es a – 3, y se anula para a = 3. Por tanto, para cualquier valor de a distinto de 3 el rango de la matriz A es 3.

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	**7**	**21**	**15**	**27**	**8**	**10**	**20**	**3**	**26**	**19**	**4**	**11**	**28**

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$**.**

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2 x 2, es:

16 14 33 6 22 14

¿Podrías hallar A?

a) El mensaje anterior, según el código numérico se transforma en:

2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia 2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 117 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 154 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 57 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 187 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 116 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que si los números que resultan de multiplicar por la matriz de cifrado son mayores de 28, como por ejemplo en el primer caso que son 30 y 76, hay que restar 28 las veces que sean necesarias hasta obtener un número menor que 28. En nuestro caso:

30 – 28 = 2 y 76 – 28 – 28 = 20

El mensaje codificado será: 2 20 14 5 14 14 21 1 14 19 13 4, que se convierte en:

MUABAAPAFAXKY.

b) Teniendo en cuenta el código numérico inicial, la palabra Marisa se corresponde con la clave numérica:

M	A	R	I	S	A
2	14	27	6	8	14

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz 2x2 buscada. Se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 14b = 16 \\ 2c + 14d = 14 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 6b = 33 \\ 27c + 6d = 6 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se obtiene: a = 1, b = 1, c = 0 y d = 1.

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 60

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

La resolución de la ecuación es:

$$A^3 \cdot X - 4B = O \Rightarrow A^3 \cdot X = 4B \Rightarrow X = \left(A^3\right)^{-1} \cdot 4B$$

Las matrices a calcular son:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; 4B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de k para los cuales A no es invertible.
b) Para k = 0, calcula la matriz A^{-1}.

c) Para k = 0, resuelve la ecuación matricial A · X = B.

a) El determinante de la matriz A es det (A) = $k^2 - 4k + 3 = (k - 1)(k - 3)$. Para K = 1 y k = 3 la matriz A no es invertible.

b) Para k = 0 la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

c) La solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica B2 = 16 I, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2 para la cual se cumple que A- 1 = At, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

Las respuestas a los distintos apartados son:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, k \cdot F_i, \ldots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

A partir de $B^2 = 16\,I$ podemos escribir $\det(B^2) = \det(16\,I)$. Calculamos ambos determinantes:

$$\det(B^2) = \det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^2$$

$$\det(16\,I) = \det\left(16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16^3$$

Por tanto, $(\det(B))^2 = 16^3 \Rightarrow \det(B) = \sqrt{16^3} \Rightarrow \det(B) = 64.$

b) No puede ser det (A) = 3 ya que se cumple:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A^t) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$**.**

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?

b) Estudia el rango según los valores de a.

c) Halla a para que se cumpla $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A$**.**

a) Una matriz A es inversible si su determinante es distinto de cero. Hallamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2 \quad \Rightarrow -2a^2=0 \;\Rightarrow\; a=0.$$

Por tanto, A es inversible si a ≠ 0.

b) Estudio del rango:

- Si a ≠ 0 el rango de la matriz A es 3, ya que el determinante de A es distinto de 0.

- Si a = 0 el rango de A es 1, ya que tiene dos columnas con todos sus elementos nulos.

c) Calculamos la matriz $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot[Adj\ (A)]^t$

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix} -2a & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & -a \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \qquad [Adj\ (A)]^t=\begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Expresamos la igualdad matricial $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}=\frac{a}{4} \\ -\frac{1}{a}=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a}=\frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2=4;\ a=-2\ y\ a=2 \\ a=2 \\ a=2 \end{cases} \quad \Rightarrow a=2$$

El valor de A buscado es a = 2. Para este valor se cumple:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X para que se cumpla la ecuación matricial A · X – 2 · I = O, siendo I y O las matrices unidad y nula, respectivamente.

Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX - 2I = = O \;\Rightarrow\; AX = 2I \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot 2I \;\Rightarrow\; X = 2A^{-1}$$

Como $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene: $X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. a) Determina para qué valores de a la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b) Considerando la matriz A del apartado anterior con a = - 1, resuelve la ecuación matricial XA + B = CA, donde:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa si su determinante es cero:

$$\det(A) = 11a - a^2 = a \cdot (11 - a) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 0 \\ a = 11 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para a = 0 y a = 11.

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$XA + B = CA \;\Rightarrow\; XA = CA - B \;\Rightarrow\; X = (CA - B) \cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; X = C - B \cdot A^{-1}$$

Hallamos las matrices A^{-1} y BA^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6}\\ 0 & \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{6}\\ 3 & \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}.$$

7. Determina la matriz X solución de la ecuación matricial A · X – I = A, donde:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Operamos en la ecuación matricial para despejar X:

$$AX - I = A \;\Rightarrow\; AX = A + I \;\Rightarrow\; X = A^{-1}\cdot(A+I) \;\Rightarrow\; X = I + A^{-1}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ y finalmente:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$