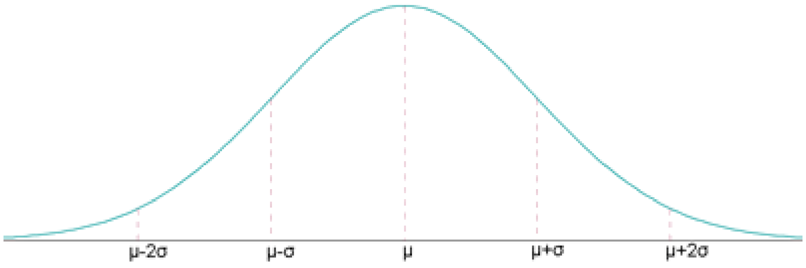
Distribución Normal

Variable aleatoria de la distribución normal

Una **variable aleatoria continua**, **X**,que sigue una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ**, y se designa por **N(μ, σ)**tiene la siguiente curva:



El campo de existencia es cualquier valor real, es decir, (-∞, +∞).

Es simétrica respecto a la media μ.

Tiene un máximo en la media μ.

Crece hasta la media μ y decrece a partir de ella.

En los puntos $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ presenta puntos de inflexión.

El eje de abscisas es una asíntota de la curva.

El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas **es igual a la unidad**.

Al ser **simétrica** respecto al eje que pasa por **x = μ**, deja un **área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha**.

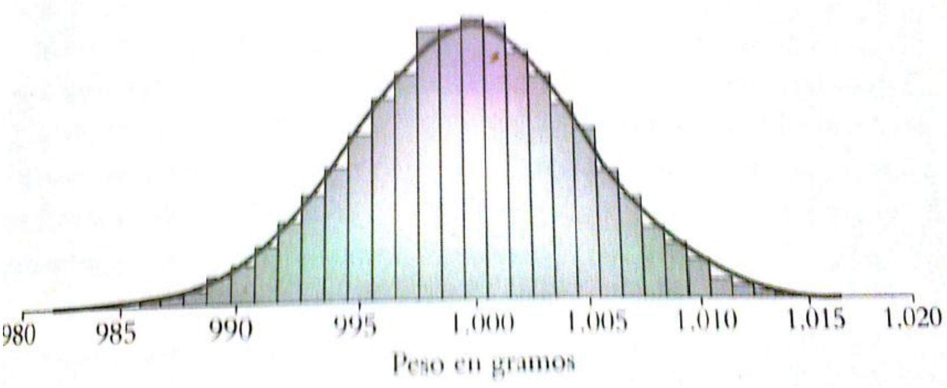
La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

$p(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826 = 68.26\ \%$

$p(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954 = 95.4\ \%$

$p(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997 = 99.7\ \%$

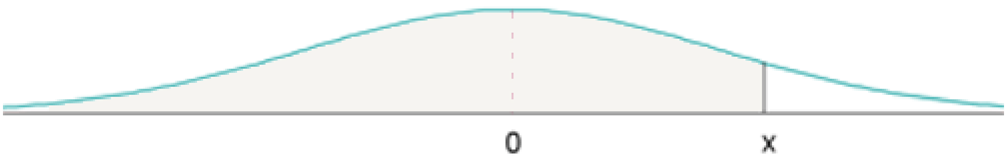
Ejemplo:posible distribucion del peso de un gran conjunto de paquetes de azucar de 1 kg



Distribución normal estándarN(0, 1)

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida,** es aquella que tiene por **media** el valor **cero**, **μ = 0**, y por **desviación típica la unidad, σ =1**.

Su gráfica es:



La probabilidad de la variable X dependerá del área del recinto sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una tabla.

Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable **X** que sigue una distribución **N(μ, σ)** en otra variable **Z** que siga una distribución **N(0, 1)**.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Ejemplo:

Se sabe que, en una ciudad, el peso de las personas mayores de 18 años se distribuye normalmente con una media de 72 kg y una desviación típica de 6 kg. Calcula la probabilidad de que, tomada una persona al azar, ésta pese más de 80 kg

a) x ≡ Peso de las personas.

b) N(72, 6)

c) $P(x > 80) = P(x \geq 80)$

Hay que tipificar: $P(x \geq 80) = P\left(z \geq \frac{80 - 72}{6}\right) = P(z \geq 1{,}33) =$

$$= 1 - P(z \leq 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

<u>Tabla de la distribución normal N(0,1)</u>

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

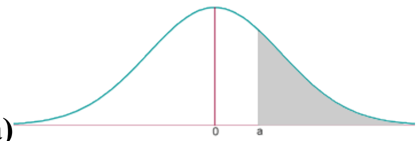
La **tabla** nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada.

Búsqueda en la tabla de valor de k: Unidades y décimas en la columna de la izquierda y las **céntesimas** en la fila de arriba.

P(Z ≤ a)

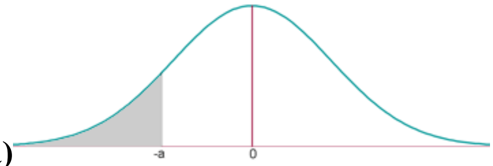
$P(Z \leq 1.47) = 0.9292$

P(Z > a) = 1 - P(Z ≤ a)



$P(Z > 1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$

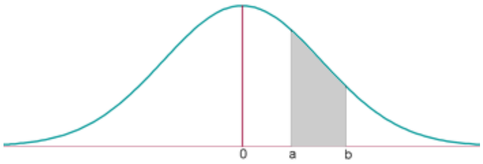


$P(Z \leq -1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$

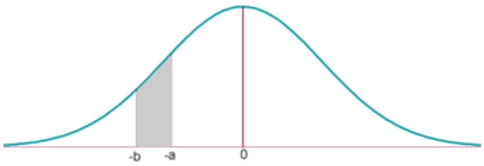
$p(Z > -1.47) = p(Z \leq 1.47) = 0.9292$

$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$



$P(0.45 < Z \leq 1.47) = P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) = 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$



$P(-1.47 < Z \leq -0.45) = P(0.45 < Z \leq 1.47) =$

$= P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) = 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

$P(-a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - [1 - P(Z \leq a)]$

$P(-1.47 < Z \leq 0.45) = P(Z \leq 0.45) - [1 - P(Z \leq 1.47)]=$

$= 0.6736 - (1 - 0.9292) = 0.6028$

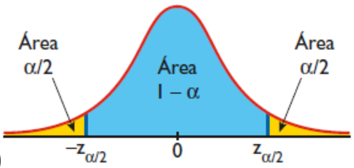
p = K

Nos encontramos con el caso inverso a los anteriores, conocemos el valor de la probabilidad y se trata de hallar el valor de la abscisa. Ahora tenemos que buscar en la tabla el **valor que más se aproxime a K**.

Ejemplo:$p = 0.75 Z \leq 0.68$

Para calcular la variable **X** nos vamos a la **fórmula de la tipificación.**

$(X - \mu)/\sigma = 0.68$ $X = \mu + 0.68\,\sigma$



Intervalo característico en una N(0,1)

Sea $z \equiv$ **N(0, 1)** y se quiere calcular un intervalo $(-k, k)$ tal que:

$$P(-k \leq z \leq k) = p$$

Se llama **valor crítico** al valor de **k.** En los problemas de estimación, se representa por $z_{\alpha/2}$. La probabilidad **p** se representa por $1 - \alpha$

Valores críticos más frecuentes

Los valores críticos más frecuentes para una **N(0, 1)** son:

Probabilidad: $1 - \alpha$	0,9	0,95	0,99
Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	1,65	1,96	2,58

Ejemplo:

Calcula el intervalo característico en una N(0, 1) correspondiente a una probabilidad de 0,95

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}95$

$$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$$

Buscando en la tabla de la N(0,1), se obtiene: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo es $(-1{,}96;\ 1{,}96)$