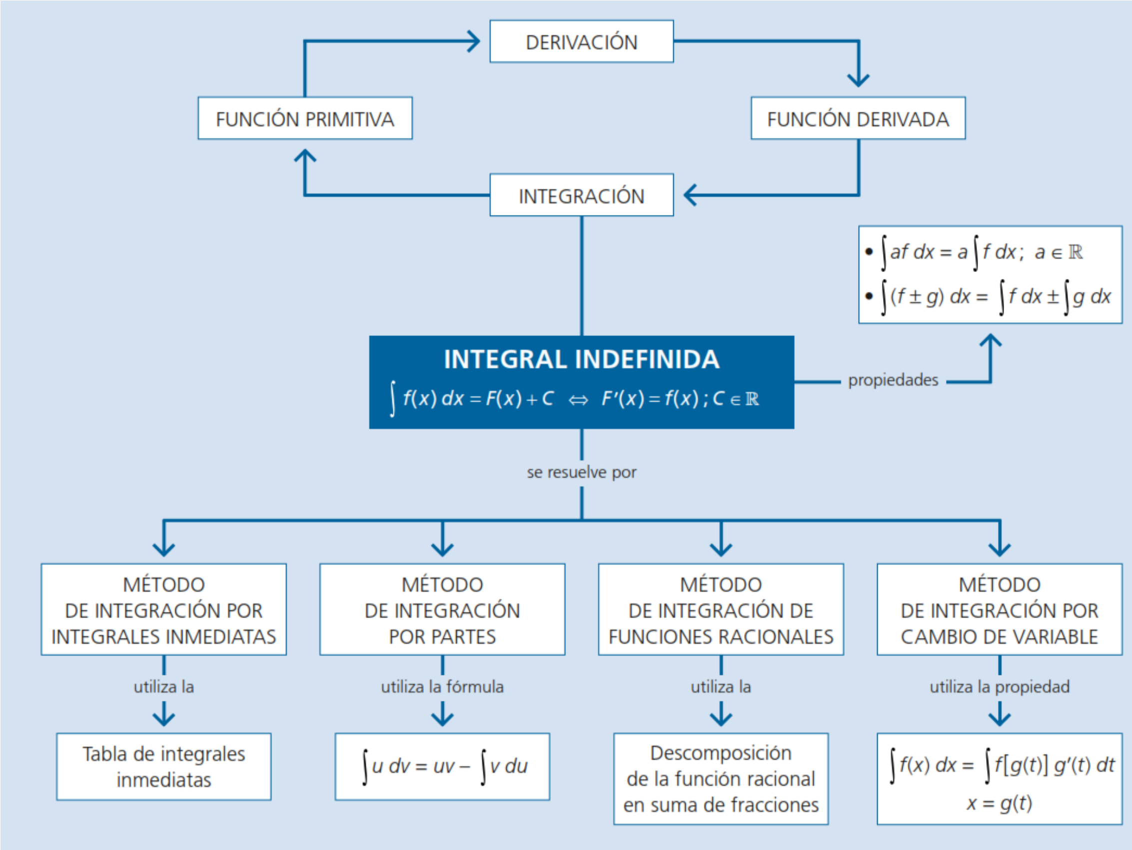
# INTEGRALES




- Una función $F$ es **primitiva** de otra función $f$ dada si la derivada de $F$ es $f$:

  $$F \text{ es primitiva de } f \Leftrightarrow F' = f$$

si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, todas las demás primitivas son de la

$$F(x) + C \quad \text{con} \quad C = \text{constante}$$

- La **integral indefinida** de una función $f$ es el conjunto de todas las primitivas de $f$, y se representa por:

  $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

  Se lee **integral de f(x) diferencial de x**. C es un número real cualquiera y se llama constante de integración.

## Propiedades de la integral indefinida

- La integral del producto de un número real por una función es igual al número real por la integral de la función:

  $$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx; \quad a \in \mathbb{R}$$

- La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de las integrales de dichas funciones:

  $$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

| INTEGRALES INMEDIATAS | | |
|---|---|---|
| **TIPO DE FUNCIÓN PRIMITIVA** | **PRIMITIVA SIMPLE** | **PRIMITIVA COMPUESTA** |
| **Función potencial** $a \neq -1$ | $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ | $\int f^a \cdot f' \, dx = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C$ |
| **Función exponencial** | $\int e^x \, dx = e^x + C$ | $\int e^f \cdot f' \, dx = e^f + C$ |
| | $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int a^f \cdot f' \, dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$ |
| **Función logarítmica** | $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$ | $\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln \lvert f \rvert + C$ |
| **Función seno** | $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$ | $\int \cos f \cdot f' \, dx = \operatorname{sen} f + C$ |
| **Función coseno** | $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$ | $\int \operatorname{sen} f \cdot f' \, dx = -\cos f + C$ |
| **Función tangente** | $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C$ | $\int (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' \, dx = \operatorname{tg} f + C$ |
| | $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$ | $\int \frac{f'}{\cos^2 f} \, dx = \operatorname{tg} f + C$ |
| **Función cotangente** | $\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$ | $\int (1 + \operatorname{cotg}^2 f) \cdot f' \, dx = -\operatorname{cotg} f + C$ |
| | $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$ | $\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} \, dx = -\operatorname{cotg} f + C$ |
| **Función arco seno** | $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$ | $\int \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} f + C$ |
| **Función arco tangente** | $\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$ | $\int \frac{f'}{1 + f^2} \, dx = \operatorname{arctg} f + C$ |

# ACTIVIDADES FINALES

1. Halla dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = 3x^2 + 5$ c) $f(x) = -3$ d) $f(x) = e^{-x}$

2. Halla una función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{3}{x-1}$ y que pasa por el punto (2, 5).

3. Halla la primitiva de la función $f(x) = (2x-3)^2$ que valga $\dfrac{9}{2}$ para $x = 0$.

4. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones potenciales:

a) $\int 7x^2 dx$

b) $\int \dfrac{5}{x^4} dx$

c) $\int \sqrt[5]{x^2} dx$

d) $\int \dfrac{x}{2x^3} dx$

e) $\int (6x^2 - 5x + 7)\, dx$

f) $\int \left(4x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right) dx$

g) $\int 3x \cdot (2x+5)^2\, dx$

h) $\int \left(\dfrac{5x^2 - 9}{x^2}\right) dx$

i) $\int \left(\dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^4}{8} - 2\right) dx$

j) $\int 4x^2 \cdot (x^3 + 2)^2\, dx$

k) $\int (6x^2 - 5)^8 \cdot x\, dx$

l) $\int 7x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 2}\, dx$

5. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones exponenciales:

a) $\int e^{3x} dx$

b) $\int 2^{4x} dx$

c) $\int x \cdot 7^{5x^2} dx$

d) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

e) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int (e^{-2x} + e^{2x}) dx$

6. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones logarítmicas:

a) $\int \dfrac{3}{2x-1} dx$

b) $\int \dfrac{4x^2}{2x^3+5} dx$

c) $\int \dfrac{5x}{4+16x^2} dx$

d) $\int \dfrac{2e^x}{3+e^x} dx$

e) $\int \dfrac{1}{x \cdot \ln x} dx$

f) $\int \dfrac{12x-3}{4x^2-2x+3} dx$

7. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones trigonométricas o sus inversas:

a) $\int \operatorname{sen} 2x\, dx$

b) $\int x \cdot \cos x^2\, dx$

c) $\int \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x} dx$

d) $\int (\cos 3x)^3 \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx$

e) $\int \operatorname{tg} x\, dx$

f) $\int \dfrac{5x^2}{\cos^2 x^3} dx$

g) $\int \dfrac{3}{1+16x^2} dx$

h) $\int \dfrac{2}{9+x^2} dx$

i) $\int \dfrac{6}{\sqrt{4-x^2}} dx$

8. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x} dx$

b) $\int (1 - 4x)^3 dx$

c) $\int \frac{4 \cdot \cos 2x}{3 - \text{sen}\, 2x} dx$

d) $\int \frac{9x^2}{1 + x^3} dx$

e) $\int 3 \cdot \cos 6x \, dx$

f) $\int \left( e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3 + 4} \right) dx$

g) $\int 5\sqrt{3x + 2}\, dx$

h) $\int \left( \sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6} \right) dx$

i) $\int \frac{(3\sqrt{x} - 2)^2}{4\sqrt{x}} dx$

j) $\int \frac{3x}{(x^2 + 7)^5} dx$

k) $\int \frac{3x}{16 + x^4} dx$

l) $\int \frac{3}{\sqrt{1 - 6x^2}} dx$

9. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int 3x \cdot e^x dx$

b) $\int (2 - 5x) \cdot \text{sen}\,(2x) dx$

c) $\int 5 \ln x \, dx$

d) $\int (x + 3) \cdot e^{-x} dx$

e) $\int 2^{3x} \cdot x\, dx$

f) $\int e^x \cdot \cos x \, dx$

g) $\int x \cdot \cos x \, dx$

h) $\int x \cdot \ln x \, dx$

i) $\int e^{2x} \cdot x^2 \, dx$

10. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\int \frac{5x - 1}{x^2 - 1} dx$

c) $\int \frac{x^2 + 2}{x} dx$

d) $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx$

e) $\int \frac{3x^3 + 16x}{x^2 + 4} dx$

f) $\int \frac{x - 2}{x^2 + 2x} dx$

g) $\int \frac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx$

h) $\int \frac{x^3 + 6}{x^2 - 4} dx$

i) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx$

11. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2 + 2}} dx$ $(5x^2 + 2 = t^3)$

b) $\int \frac{2}{x \cdot (3 + \ln x)^2} dx$ $(\ln x = t)$

c) $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$ $(e^x = t)$

d) $\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$ $(x = t^2)$

12. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int \frac{2}{3 + \sqrt{x - 2}} dx$

b) $\int \frac{4 + \ln^3 x}{2x} dx$

c) $\int \frac{4\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

d) $\int \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x \; dx$

e) $\int \frac{\ln x + 8}{x \cdot (\ln^2 x + 4 \ln x)} dx$

f) $\int \frac{4e^x}{e^{2x} - 1} dx$

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 240

**1. Halla dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:**

**a) f (x) = 4x** **b) f (x) = $3x^2 + 5$** **c) f (x) = -3** **d) f (x) = $e^{-x}$**

Ejemplos de las primitivas pedidas son:

a) F (x) = $2x^2 + 4$; F (x) = $2x^2 - 7$

b) F (x) = $x^3 + 5x - 2$; F (x) = $x^3 + 5x$

c) F (x) = -3x + 1; F (x) = -3x – 0,5

d) F (x) = $- e^{-x} + 9$; F (x) = $- e^{-x} - 6$

**2. Halla una función f(x) cuya derivada es f ´(x) = $\frac{3}{x-1}$ y que pasa por el punto (2, 5).**

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:

F (x) = $\int \frac{3}{x-1}\, dx = 3\ \ln|x-1| + C$

Como f (2) = 5, entonces 5 = 3 · ln (1) + C, de modo que C = 5. La función buscada es:

$$f(x) = 3\ \ln|x-1| + 5$$

**3. Halla la primitiva de la función f(x) = $(2x - 3)^2$ que valga $\frac{9}{2}$ para x = 0.**

Todas las primitivas de la función son f(x) = $\int (2x-3)^2\ dx = \frac{(2x-3)^3}{6} + C$.

Se debe verificar que f (0) = $\frac{9}{2}$. De modo que sustituyendo obtenemos: $\frac{9}{2} = \frac{-27}{6} + C$, es decir, C = 9.

La función buscada es f(x) = $\frac{(2x-3)^3}{6} + 9$

**4. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones potenciales:**

**a)** $\int 7x^2\ dx$ **e)** $\int (6x^2 - 5x + 7)\, dx$ **i)** $\int \left( \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2 \right) dx$

**b)** $\int \frac{5}{x^4}\, dx$ **f)** $\int \left( 4x^3 - \frac{2}{x^2} \right) dx$ **j)** $\int 4x^2 \cdot (x^2+2)^2\ dx$

**c)** $\int \sqrt[5]{x^2}\ dx$ **g)** $\int 3x\ (2x+5)^2\ dx$ **k)** $\int (6x^2 - 5)^8 \cdot x\, dx$

**d)** $\int \frac{x}{2x^3}\, dx$ **h)** $\int \left(\frac{5x^2-9}{x^2}\right) dx$ **l)** $\int 7x^2 \sqrt{x^3+2}\, dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int 7x^2\, dx = \frac{7x^3}{3} + C$

b) $\int \frac{5}{x^4}\, dx = \frac{-5}{3\,x^3} + C$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{5\,\sqrt[5]{x^7}}{7} + C$

d) $\int \frac{x}{2x^3}\, dx = \frac{-1}{2x} + C$

e) $\int \left(6x^2 - 5x + 7\right) dx = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$

f) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{2}{x} + C$

g) $\int 3x\,(2x+5)^2\, dx = 3x^4 + 20x^3 + \frac{75}{2}x^2 + C$

h) $\int \left(\frac{5x^2-9}{x^2}\right) dx = 5x + \frac{9}{x} + C$

i) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2\right) dx = 3\sqrt{x} + \frac{x^5}{40} - 2x + C$

j) $\int 4x^2 \cdot (x^2+2)^2\, dx = \int \left(4x^6 + 16x^4 + 16x^2\right) dx = \frac{4x^7}{7} + \frac{16x^5}{5} + \frac{16x^3}{3} + C$

k) $\int (6x^2-5)^8 \cdot x\, dx = \frac{(6x^2-5)^9}{108} + C$

l) $\int 7x^2 \sqrt{x^3+2}\, dx = \frac{14\sqrt{(x^3+2)^3}}{9} + C$

**5. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones exponenciales:**

**a)** $\int e^{3x}\,dx$

**b)** $\int 2^{4x}\,dx$

**c)** $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx$

**d)** $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx$

**e)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

**f)** $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+C$

b) $\int 2^{4x}\,dx = \frac{1}{4\ln 2}2^{4x}+C$

c) $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx = \frac{1}{10\cdot\ln 7}7^{5x^2}+C$

d) $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}}+C$

f) $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

**6. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones logarítmicas:**

**a)** $\int \frac{3}{2x-1}dx$

**b)** $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx$

**c)** $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx$

**d)** $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\,dx$

**e)** $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$

**f)** $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

b) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx = \frac{2}{3}\ln|2x^3+5|+C$

c) $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx = \frac{5}{32}\ln|4+16x^2|+C$

d) $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\ dx = 2\ln\left|3+e^x\right| + C$

e) $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\ dx = \ln\left|\ln x\right| + C$

f) $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3}\ dx = \frac{3}{2}\ln\left|4x^2-2x+3\right| + C$

**7. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones trigonométricas o sus inversas:**

**a)** $\int sen 2x\ dx$

**b)** $\int x\cdot\cos x^2\ dx$

**c)** $\int \frac{\cos x}{2+senx}dx$

**d)** $\int (\cos 3x)^3 \cdot sen\,3x\ dx$

**e)** $\int tg\,x\ dx$

**f)** $\int \frac{5x^2}{\cos^2 x^3}\ dx$

**g)** $\int \frac{3}{1+16x^2}dx$

**h)** $\int \frac{2}{9+x^2}dx$

**i)** $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int sen 2x\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b) $\int x\cdot\cos x^2\ dx = \frac{1}{2}\,sen\left(x^2\right) + C$

c) $\int \frac{\cos x}{2+senx}dx = \ln(2+senx) + C$

d) $\int (\cos 3x)^3\cdot sen\,3x\ dx = -\frac{1}{12}\cos^4(3x) + C$

e) $\int tg\,x\ dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$

f) $\int \frac{5x^2}{\cos^2 x^3}\ dx = \frac{5}{3}\,tg\,x^3 + C$

g) $\int \frac{3}{1+16x^2}\ dx = \frac{3}{4}\,arctg(4x) + C$

h) $\int \frac{2}{9+x^2}dx = \frac{2}{3}\,arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$

i) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \quad 6 \cdot arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C$

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 241

**8. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:**

**a)** $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\, dx$

**b)** $\int (1-4x)^3\, dx$

**c)** $\int \frac{4 \cdot \cos 2x}{3 - sen2x}\, dx$

**d)** $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\, dx$

**e)** $\int 3 \cdot \cos 6x\, dx$

**f)** $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4}\right) dx$

**g)** $\int 5\sqrt{3x+2}\, dx$

**h)** $\int \left(\sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6}\right) dx$

**i)** $\int \frac{\left(3\sqrt{x} - 2\right)^2}{4\sqrt{x}}\, dx$

**j)** $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\, dx$

**k)** $\int \frac{3x}{16 + x^4}\, dx$

**l)** $\int \frac{3}{\sqrt{1-6x^2}}\, dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\, dx = \frac{2x^3}{9} - \sqrt{x} + \frac{1}{3}\ln|x| + C$

b) $\int (1-4x)^3\, dx = \frac{-(1-4x)^4}{16} + C$

c) $\int \frac{4 \cdot \cos 2x}{3 - sen2x}\, dx = -2 \cdot \ln|3 - sen2x| + C$

d) $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\, dx = 3 \cdot \ln\left|1 + x^3\right| + C$

e) $\int 3 \cdot \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}\, sen\,6x + C$

f) $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4}\right) dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{5}{3}\ln\left|x^3+4\right| + C$

g) $\int 5\sqrt{3x+2}\, dx = \frac{10}{9}(3x+2)^{3/2} + C$

h) $\int\left(\sqrt[3]{5x}-\dfrac{3}{x^6}\right)dx=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{5x^4}+\dfrac{3}{5x^5}+C$ =

i) $\int\dfrac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{4\sqrt{x}}\,dx$ = $\dfrac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^3}{18}+C$

j) $\int\dfrac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx$ = $\dfrac{-3\left(x^2+7\right)^{-4}}{8}+C$

k) $\int\dfrac{3x}{16+x^4}\,dx$ = $\dfrac{3}{8}\,arctg\left(\dfrac{x^2}{4}\right)+C$

l) $\int\dfrac{3}{\sqrt{1-6x^2}}\,dx$ = $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,arcsen\,\left(\sqrt{6}\,x\right)+C$

**9. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:**

**a)** $\int 3x\cdot e^x\;dx$

**b)** $\int(2-5x)\cdot sen\;(2x)\;dx$

**c)** $\int 5\,\ln x\;\;dx$

**d)** $\int(x+3)\cdot e^{-x}\,dx$

**e)** $\int 2^{3x}\cdot x\;\;dx$

**f)** $\int e^x\cdot\cos x\;dx$

**g)** $\int x\cdot\cos x\;dx$

**h)** $\int x\cdot\ln\;x\;\;dx$

**i)** $\int e^{2x}\cdot x^2\;dx$

En cada una de las siguientes integrales utilizamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

a) $\int 3x\cdot e^x\;dx$ = $3x\cdot e^x-\int 3\,e^x\;dx=3x\cdot e^x-3\cdot e^x+C$

b) $\int(2-5x)\cdot sen\,(2x)\;dx$ = $-\dfrac{2-5x}{2}\cdot\cos 2x-\int\dfrac{5}{2}\cos 2x\;dx=-\dfrac{2-5x}{2}\cos\,2x-\dfrac{5}{4}\,sen\,2x+C$

c) $\int 5\,\ln x\;\;dx$ = 5x · ln x – 5x + C

d) $\int(x+3)\cdot e^{-x}\,dx$ = $-(x+3)\cdot e^{-x}-\int -e^{-x}\;dx=-(x+4)\cdot e^{-x}\;+C$

e) $\int 2^{3x}\cdot x\;\;dx$= $\dfrac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x}-\dfrac{1}{3\ln 2}\int 2^{3x}\;dx=\dfrac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x}-\dfrac{1}{(3\ln 2)^2}\cdot 2^{3x}+C$

f) Esta es una integral cíclica, pues al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a salir la misma integral:

$\int e^{2x}\cdot\cos x\ dx$ = $e^{2x}$ · sen x - $\int 2e^{2x}\cdot sen\, x\ dx$ = $e^{2x}$ · sen x + $2e^{2x}$ · cos x - $\int 4e^{2x}\cdot\cos x\ dx$

Llamando I a la integral inicial obtenemos: I = $e^{2x}$ · sen x + $2e^{2x}$ · cos x – 4 I. De modo que despejando I:

$$\int e^{2x}\cdot\cos x\ dx = \frac{e^{2x}\cdot senx + 2e^{2x}\cdot\cos x}{5} + C$$

g) $\int x\cdot\cos x\ dx = x\cdot senx - \int senx\ dx = x\cdot senx + \cos x + C$

h) $\int x\cdot\ln\ x\ \ dx = \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln x - \int\frac{1}{2}x\ \ dx = \frac{x^2}{2}\cdot\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

i) $\int e^{2x}\cdot x^2\ dx = \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{2x} - \int x\ e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$

**10. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:**

**a)** $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

**b)** $\int\frac{5x-1}{x^2-1}dx$

**c)** $\int\frac{x^2+2}{x}dx$

**d)** $\int\frac{3x+1}{x^2-4x+3}dx$

**e)** $\int\frac{3x^3+16x}{x^2+4}dx$

**f)** $\int\frac{x-2}{x^2+2x}dx$

**g)** $\int\frac{2x^2-10}{x^2-x-2}dx$

**h)** $\int\frac{x^3+6}{x^2-4}dx$

**i)** $\int\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2+1}dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int\frac{dx}{x^2-5x+6} = \int\frac{-1}{x-2}dx + \int\frac{1}{x-3}dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$

b) $\int\frac{5x-1}{x^2-1}dx = \int\frac{2}{x-1}dx + \int\frac{3}{x+1}dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C$

c) $\int\frac{x^2+2}{x}dx = \int x\ dx + \int\frac{2}{x}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C$

d) $\int\frac{3x+1}{x^2-4x+3}dx = \int\frac{-2}{x-1}dx + \int\frac{5}{x-3}dx = -2\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$

e) $\int\frac{3x^3+16x}{x^2+4}dx = \int 3x\ dx + \int\frac{4x}{x^2+4}dx = \frac{3x^2}{2} + 2\ln|x^2+4| + C$

f) $\int \frac{x-2}{x^2+2x}dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = -\ln|x| + 2\ln|x+2| + C$

g) $\int \frac{2x^2-10}{x^2-x-2}dx = \int \frac{2\left(x^2-x-2\right)+2x-6}{x^2-x-2}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{2x-6}{x^2-x-2}\,dx =$

$= 2x + \int \frac{8/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-2/3}{x-2}\,dx = 2x + \frac{8}{3}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\ln|x-2| + C$

h) $\int \frac{x^3+6}{x^2-4}dx = \int \frac{x\left(x^2-4\right)+4x+6}{x^2-4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{4x+6}{x^2-4}\,dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{7}{2}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

i) $\int \frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2+1}\,dx = \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx = \frac{(x-2)^2}{2} + 5\,arctg\,(x) + C$

**11. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:**

**a)** $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx$ **($5x^2+2=t^3$)**

**c)** $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$ **($e^x=t$)**

**b)** $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx$ **($\ln x = t$)**

**d)** $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **($x=t^2$)**

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx = \int \frac{4x}{t}\cdot\frac{3t^2}{10x}\,dt = \frac{3t^2}{5} = \frac{3\left(5x^2+2\right)^{\frac{2}{3}}}{5} + C$

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx = \int \frac{2}{x(3+t)^2}\cdot x\,dt = \frac{-2}{3+t} = \frac{-2}{3+\ln x} + C$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \int \frac{e^x}{t+4}\cdot\frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t+4} = \ln|t+4| = \ln\left|e^x+4\right| + C$

d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^3}{1+t}\,dt = \int \frac{(1+t)\cdot(2t^2-2t+2)-2}{1+t}\,dt =$

$= \int (2t^2-2t+2)\,dt - \int \frac{2}{1+t}\,dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| =$

$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$

**12. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:**

**a)** $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx$ **c)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **e)** $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4\ln x)}\,dx$

**b)** $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx$ **d)** $\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\,dx$ **f)** $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) Mediante el cambio x -2 = t², obtenemos: $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2}{3+t}\cdot 2t\,dt =$

$= \int \frac{4t}{3+t}\,dx = \int \frac{4(3+t)-12}{3+t}\,dt = 4t - 12\ln|3+t| = 4\sqrt{x-2} - 12\ln|3+\sqrt{x-2}| + C$

b) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos:

$\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx = \int \frac{4+t^3}{2x}\cdot x\,dt = 2t + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = 2\ln x + \frac{1}{2}\frac{\ln^4 x}{4} + C$

c) Mediante el cambio x = t², obtenemos: $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t}{1+t}\,2tdt = \int \frac{8t^2}{1+t}\,dt =$ esta es una integral racional y queda:

$\int \frac{8(t-1)(t+1)+8}{1+t}\,dt = 8\frac{(t-1)^2}{2} + 8\ln|1+t| = 4(\sqrt{x}-1)^2 + 8\ln|1+\sqrt{x}| + C$

d) Mediante el cambio sen x = t, obtenemos:

$\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\,dx = \int \cos x \cdot (1-sen^2 x)sen^2 x\,dx = \int \cos x \cdot (1-t^2)t^2\,\frac{dt}{\cos x} =$

$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$

e) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos: $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4\ln x)}\,dx = \int \frac{t+8}{x(t^2+4t)}\,x\,dt =$

$= \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{-1}{t+4}\,dt = 2\ln|t| - \ln|t+4| = 2\ln|\ln x| - \ln|\ln x + 4| + C$

f) Mediante el cambio eˣ = t, obtenemos: $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{4t}{t^2-1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t-1}\,dt + \int \frac{-2}{t+1}\,dt =$

$= 2\ln|t-1| - 2\ln|t+1| = 2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$