INTEGRALES DEFINIDAS

Integrales definidas. Aplicaciones
4. Regla de Barrow

- La integral definida de una función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia de los valores que toma una primitiva F cualquiera en los extremos superior e inferior del intervalo $[a, b]$. Se denota por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

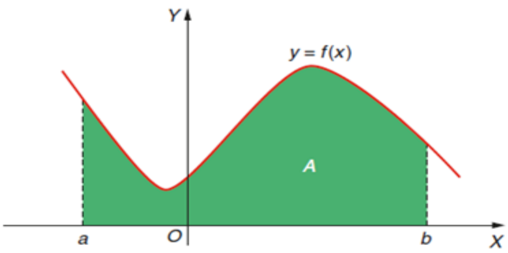
$F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$.

Cálculo de integrales definidas

- Para calcular integrales definidas $\int_a^b f(x)dx$, seguimos estos pasos:
  1. Calculamos la integral indefinida correspondiente $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.
  2. Tomamos una primitiva cualquiera, en particular podemos hacer $C = 0$ y tomar $F(x)$.
  3. Calculamos la integral definida aplicando la regla de Barrow.

Integrales definidas. Aplicaciones
5. Área encerrada bajo una curva

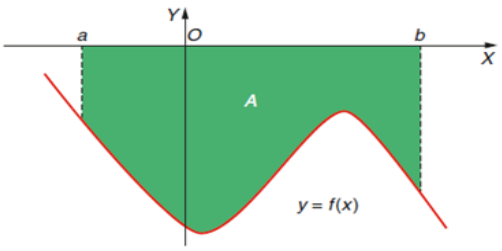
- Si f es definida positiva en $[a, b]$, el área del recinto correspondiente es:



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

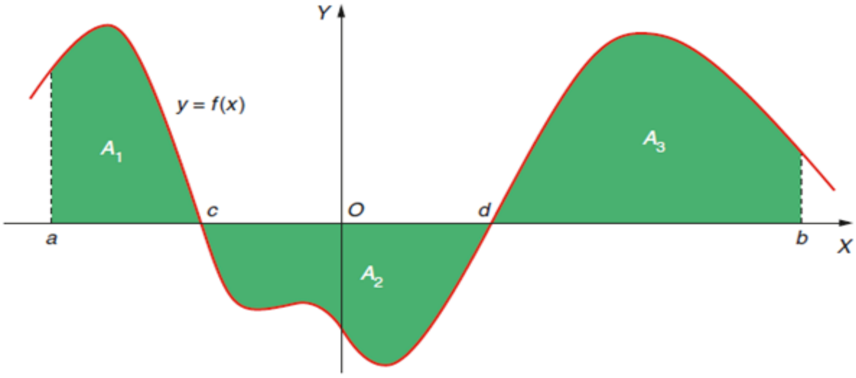
- Si f es definida negativa en $[a, b]$, el área del recinto correspondiente es:



$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

- Si f cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, el área del recinto correspondiente es la suma de las integrales definidas afectadas de los respectivos signos:

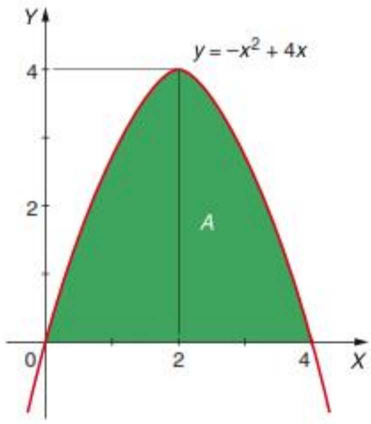


$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Ejercicios:

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x$ y el eje OX.



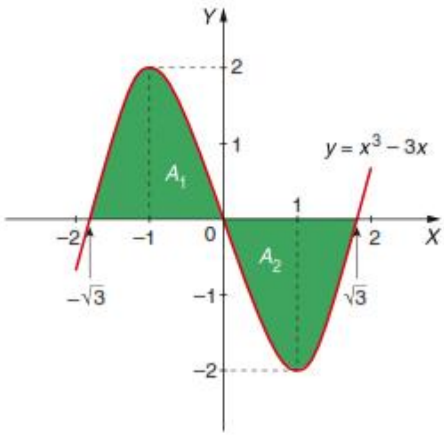
Una vez representada la función, obtenemos el recinto cuya área queremos hallar. Este recinto está delimitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$.

Como f es definida positiva en $[0, 4]$, el área del recinto es:

$$A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 2\cdot 0^2\right) =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas } (u^2)$$

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y el eje OX.



Una vez representada la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$, señalamos el recinto cuya área queremos hallar y obtenemos que el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}\,u^2$$

También podemos calcular el área utilizando la simetría de la función:

$$A = 2A_1 = 2\cdot\frac{9}{4} = \frac{9}{2}\,u^2$$

8. Halla, por métodos geométricos y mediante integrales, las áreas de los siguientes recintos:

   a) El recinto limitado por la recta $y = x - 1$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

   b) El recinto limitado por la recta $2y = x + 3$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

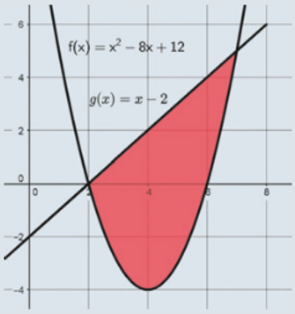
9. Halla el área del recinto limitado por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje OX.

10. Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = \dfrac{2}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

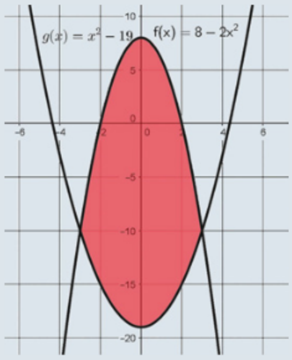
11. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

12. Calcula el área de cada uno de los siguientes recintos:

a)



b)



13. Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación $y = 2x^2$ y la recta $y = 2x + 4$.

14. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones de los siguientes apartados:

   a) $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$

   b) $y = x^2 - 9$; $y = -2x^2$

   c) $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$

   d) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$

15. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   a) Estudia la continuidad de esta función.

   b) Haz la gráfica de la misma.

   c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

16. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 2 - x^2$ y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.

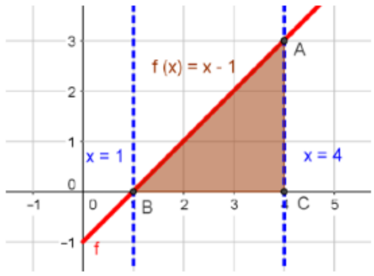
17. Encuentra el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta $x = e$.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 265

8. Halla, por métodos geométricos y mediante integrales, las áreas de los siguientes recintos:

a) El recinto limitado por la recta y = x – 1, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 4.

b) El recinto limitado por la recta 2y = x + 3, el eje OX y las rectas x = -1 y x = 2.



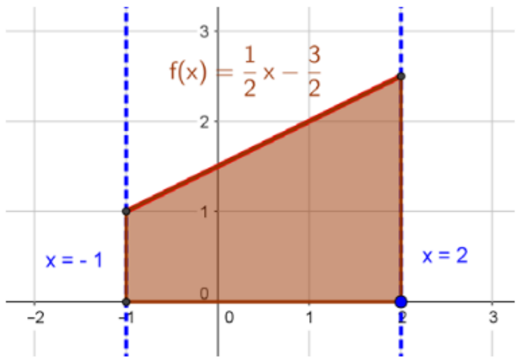
Las áreas pedidas son:

a) Por métodos geométricos es un triángulo ABC, como vemos en la figura. Su área es 4,5 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_1^4 (x-1)\, dx = 4{,}5\ uc$.

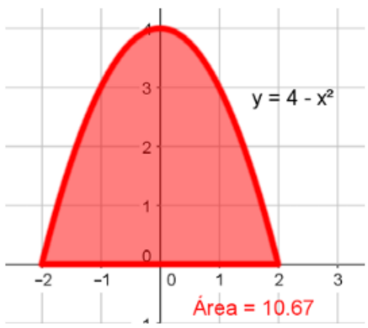
b) Por métodos geométricos es un trapecio ABCD, como vemos en la figura. Su área es 5,25 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_{-1}^{2} \frac{x+3}{2}\, dx = 5{,}25\ uc$.



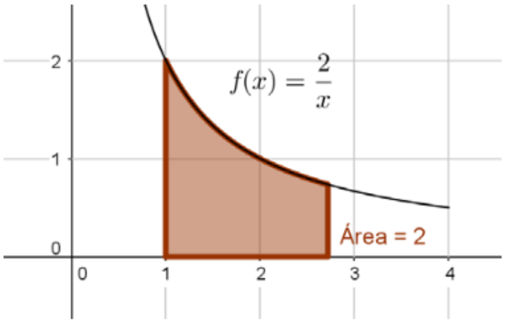
9. Halla el área del recinto limitado por la curva y = 4 – x² y el eje OX.

El área buscada es $\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3} = 10{,}67$ uc.



10. Calcula el área del recinto limitado por la curva y = $\dfrac{2}{x}$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = e.

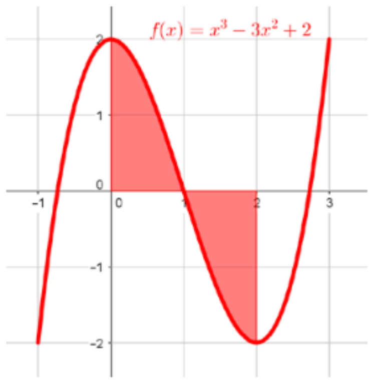
El área pedida es: $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2$ uc.



11. Halla el área de la región limitada por la curva y = $x^3 - 3x^2 + 2$, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

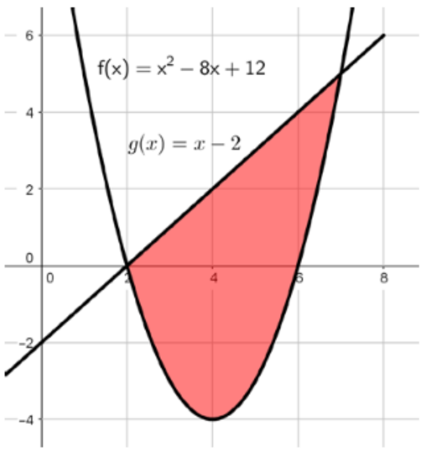
El área, A, del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2)\,dx = 2{,}5\ uc$$

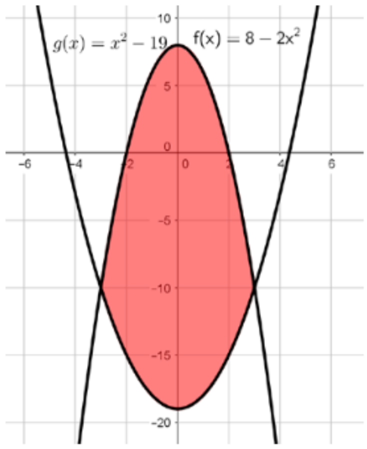


12. Calcula el área de cada uno de los siguientes recintos:

a)



b)



a) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 8x + 12 \end{cases}$ que son A (2, 0) y B (7, 5)

El área del recinto sombreado es: $A = \int_2^7 [x - 2 - (x^2 - 8x + 12)]\, dx = 20{,}83 \quad uc$

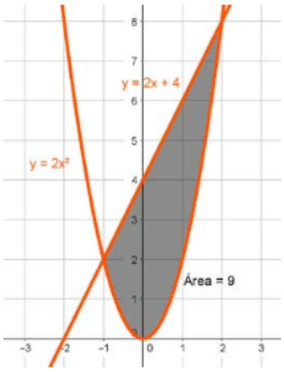
b) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 19 \\ y = 8 - 2x^2 \end{cases}$ que son A (- 3, - 10) y B (3, - 10)

El área del recinto sombreado es: $A = 2\int_0^3 [(8 - 2x^2) - (x^2 - 19)]\, dx = 108 \quad uc$

13. Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación y = $2x^2$ y la recta y = 2x + 4.

El área buscada viene dada por las integrales:

$$\int_{-1}^{2} (2x + 4)\, dx - \int_{-1}^{2} 2x^2\, dx = \left[x^2 + 4x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3} \right) = 9\ uc.$$



14. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones de los siguientes apartados:

a) $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$

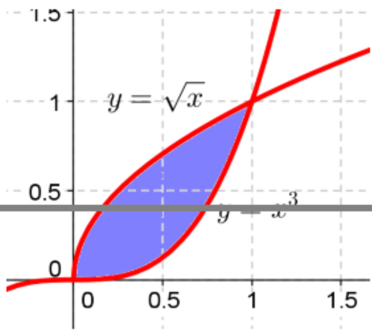
b) $y = x^2 - 9$; $y = -2x^2$

c) $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$

d) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$

a) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

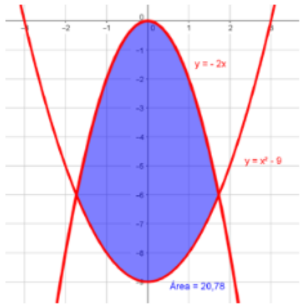
$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \quad (0, 0); (1, 1)$$



El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \frac{5}{12} = 0{,}42\ uc$$

b) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:



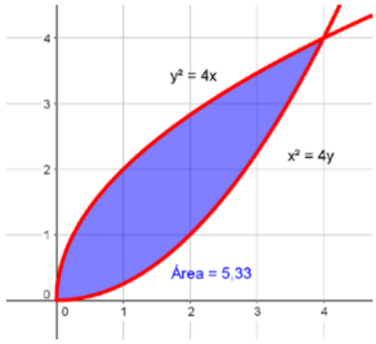
$$\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ y = -2x^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, -6\right);\left(-\sqrt{3}, -6\right)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2 - 9 - (-2x^2)\right) dx = 12\sqrt{3} = 20{,}78\ uc$$

c) Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

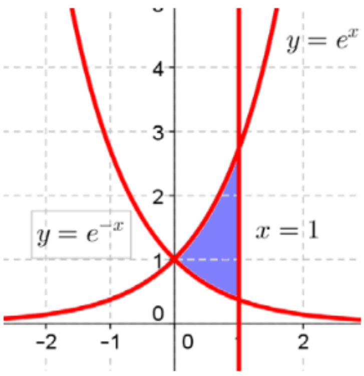
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow (0, 0);(4, 4)$$



El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3} = 5{,}33\ uc\,.$$

d) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:



$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow (0, 1)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 e^{-x}\, dx = 1{,}086\ uc$$

15. Sea la función f(x) = $\begin{cases} 2 & si \quad x \le -3 \\ x^2 & si \quad -3 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de esta función.

b) Haz la gráfica de la misma.

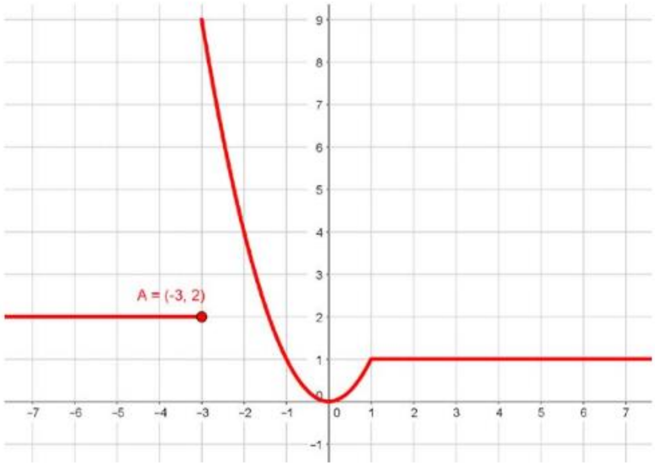
c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

a) Estudiamos la continuidad en x = 1 y en x = -3

Como $\underset{x \to -3^-}{lím} f(x) = \underset{x \to -3^-}{lím} 2 = 2$; $\underset{x \to -3^+}{lím} f(x) = \underset{x \to -3^+}{lím} x^2 = 9$ y f (- 3) = 2, la función dada no es continua en x = - 3.

Como $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) = \underset{x \to 1^-}{lím} x^2 = 1$; $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x) = \underset{x \to 1^+}{lím} 1 = 1$ y f (1) = 1, la función dada es continua en x = 1.

b) La gráfica es:

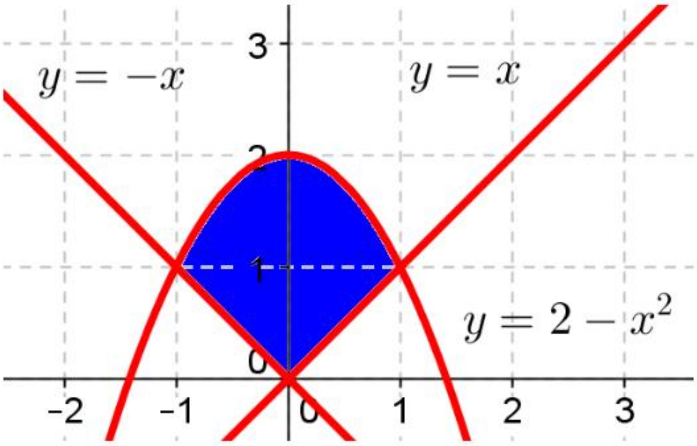


c) El área pedida es: $A = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 1\, dx = \frac{4}{3}\, uc = 1{,}33\, uc$

16. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = 2 – x² y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.

En la gráfica esta sombreada la región cuya área queremos hallar. Su valor es:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = \frac{7}{3} = 2{,}33\, uc$$



17. Encuentra el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f\ (x) = \dfrac{1}{x}$ y $g\ (x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta x = e.

El área del recinto es:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln\ x + \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(\ln\ e + \frac{1}{e}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$