ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 170

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $g(x) = \frac{2x}{x+2}$ **c)** $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $k(x) = \sqrt{x+5}$

Las tasas pedidas son:

a) $t_{vm}\ [2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{15-3}{2} = 6$

b) $t_{vm}\ [2, 4] = \frac{g(4) - g(2)}{4-2} = \frac{\frac{4}{3} - 1}{2} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$

c) $t_{vm}\ [2, 4] = \frac{h(4) - h(2)}{4-2} = \frac{\frac{5}{17} - \frac{3}{10}}{2} = -\frac{1}{340} \approx -0,0029$

d) $t_{vm}\ [2, 4] = \frac{k(4) - k(2)}{4-2} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \approx 0,1771$

2. Una empresa que fabrica componentes electrónicos ha comprobado que la variación de la demanda, D, de un determinado producto en función de su precio varía de acuerdo con la expresión:

$$D(x) = 1000 - 2x^2$$

a) Determina la variación de la demanda si el precio cambia de 5 a 10 euros.

b) Calcula la variación media de la demanda en el intervalo de precios [5, 15].

c) Averigua la variación instantánea de la demanda para x = 5.

a) Las demandas del producto para x = 5 y x = 10 euros, son respectivamente:

$$D(5) = 1000 - 2 \cdot 5^2 = 950 \text{ y } D(10) = 1000 - 2 \cdot 10^2 = 800$$

La variación de la demanda será D (10) – D (5) = 800 – 950 = - 150.

b) La variación media de la demanda en el intervalo [5, 15] es:

$$t_{vm}\ [5, 15] = \frac{D(15) - D(5)}{15 - 5} = \frac{550 - 950}{10} = -40$$

c) La variación instantánea de la demanda para x = 5 será:

$$t_{vi}\ (5) = \lim_{x \to 5} \frac{D(x) - D(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{50 - 2x^2}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{-2(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \to 0} [-2 \cdot (x+5)] = -20$$

3. El crecimiento de una colonia de bacterias viene dado por la siguiente expresión en función del tiempo P (t) = t^2 + 40t + 100, donde éste viene dado en minutos.

a) ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento entre el comienzo del cultivo y pasados 10 minutos?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a los 10 minutos?

a) La velocidad media entre t = 0 y t = 10 es:

$$t_{vm}\ [0, 10] = \frac{P\ (10) - P\ (0)}{10 - 0} = \frac{600 - 100}{10} = 50$$

b) La velocidad de crecimiento para t = 10 es:

$$t_{vi}\ (10) = \lim_{t \to 10} \frac{P\ (t) - P\ (10)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{t^2 + 40t - 500}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{(t - 10)\ (t + 50)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} (t + 50) = 60$$

4. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = 2x – x^2; D [f (1)] **b)** $f\ (x) = \sqrt{x - 3};\ f\,'(7)$ **c)** $f\ (x) = \frac{2}{x + 1};\ D\left[f\ (3)\right]$

Las derivadas son:

a) $$D\left[f\ (1)\ \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (1 + h) - f\ (1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h) - (1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

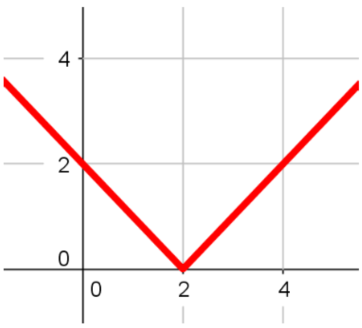
b) $$f\,'\ (7) = \lim_{x \to 7} \frac{f\ (x) - f\ (7)}{x - 7} = \lim_{x \to 70} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} \cdot \frac{\sqrt{x - 3} + 2}{\sqrt{x - 3} + 2} =$$

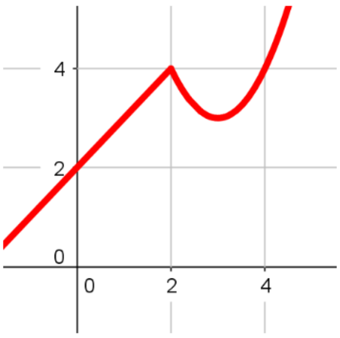
$$= \lim_{x \to 70} \frac{x - 7}{(x - 7) \cdot \left(\sqrt{x - 3} + 2\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 2} = \frac{1}{4}$$

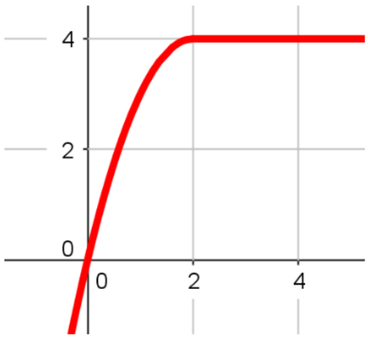
c) $$D\left[f\ (3)\ \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (3 + h) - f\ (3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{h + 4} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h\ (h + 4)} = -\frac{1}{8}$$

■ 5. Haciendo uso del concepto de derivada lateral en un punto, estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x = 2. Para cada una de ellas representa gráficamente su función derivada.

a) f (x) = |2 - x| **b)** $g\ (x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **c)** $h\ (x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



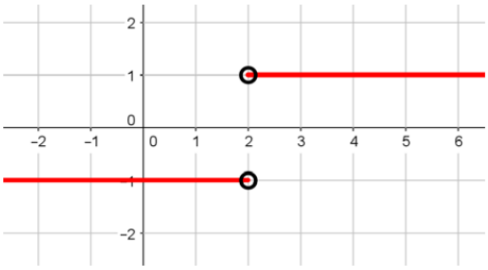




a) La función f (x) = |2 - x| es derivable en R – {2}.

La derivadas laterales en x = 2 son f ´ (2⁻) = - 1 y f ´ (2⁺) = 1.

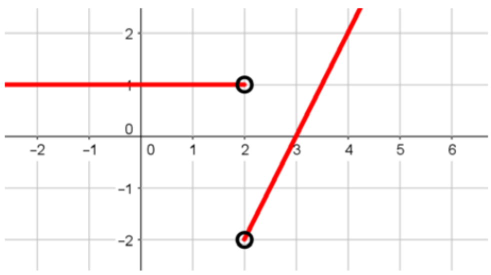
La función derivada es $f\,'(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



b) La función $g\ (x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & si\ x > 2 \end{cases}$ es derivable en R – {2}.

Las derivadas laterales en x = 2 son g ´ (2⁻) = 1 y g ´ (2⁺) = - 2.

La función derivada es $g\,'(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x < 2 \\ 2x - 6 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



c) La función $h(x)=\begin{cases} -x^2+4x & si\ x\le 2 \\ 4 & si\ x>2 \end{cases}$ es derivable en R.

Las derivadas laterales en x = 2 son h ´ (2^-) = 0 y h ´ (2^+) = 0.

La función derivada es $h'(x)=\begin{cases} -2x+4 & si\ \ x<2 \\ 0 & si\ x>2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.

6. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = $2x^3 + x$ en $x_0 = 0$ **b)** $g(x)=\dfrac{6}{x}$ **en $x_0 = 2$** **c)** $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ **en $x_0 = 3$**

a) El punto de tangencia es (0, 0). La pendiente de la recta tangente es f ´ (0) = 1.

La ecuación de la tangente es y – 0 = 1 · (x – 0), es decir, x – y = 0.

b) El punto de tangencia es (2, 3). La pendiente de la recta tangente es g ´ (2) = $-\dfrac{3}{2}$.

La ecuación de la tangente es: $y-3=-\dfrac{3}{2}(x-2)$, es decir, 3x + 2y = 12.

c) El punto de tangencia es (3, 4). La pendiente de la recta tangente es h ´ (3) = $-\dfrac{3}{4}$.

La ecuación de la tangente es: $y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$, es decir, 3x + 4y = 25.

7. Sea la curva de ecuación y = - x^3 + 11x. Halla las ecuaciones de sus rectas tangentes que sean paralelas a la recta de ecuación y = - x.

La derivada de la función es f ´ (x) = - $3x^2$ + 11.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación – $3x^2$ + 11 = - 1. Éstas son x = - 2 y x = 2. Los puntos de tangencia son P (- 2, - 14) y Q (2, 14).

Las rectas tangentes pedidas son:

- En el punto P (- 2, - 14): y + 14 = - (x + 2), es decir, x + y = - 16.

En el punto Q (2, 14): y – 14 = - (x – 2), es decir, x + y = 16.

8. Encuentra los puntos de la gráfica de $f\ (x) = \dfrac{3 - x^2}{x^3}$ en los que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación y = 2.

La pendiente de la recta tangente es la derivada en dicho punto: $f\ '\ (x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^4}$.

La pendiente de la recta y = 2 es 0. Por tanto las tangentes de f (x) paralelas a y = 2 tiene que cumplir:

$$\frac{x^2 - 9}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son $\left(-3, \dfrac{2}{9}\right)\ y\ \left(3, -\dfrac{2}{9}\right)$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 171

9. ¿Para qué valores de m y n cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \le 1 \\ -x^2 + nx & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $g\ (x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x \le 0 \\ mx + n & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Para que la función sea continua en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 5x + m\right) = m - 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-x^2 + nx\right) = -1 + n \end{array}\right\} \Rightarrow m - 4 = -1 + n \quad \Rightarrow m - n = 3$$

Para que la función sea derivable en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\ '\ (1^-) = -3 \\ f\ '\ (1^+) = -2 + n \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + n = -3$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} m - n = 3 \\ -2 + n = -3 \end{cases}$, obtenemos: $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$

b) Para que la función sea continua en x = 0 se cumplirá:

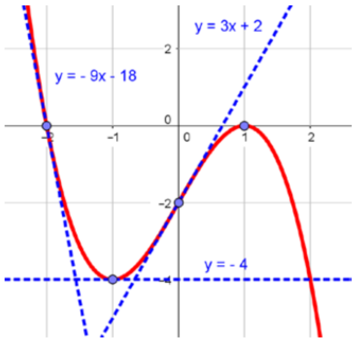
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^3 - x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(mx + n\right) = n \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0$$

Para que la función sea derivable en x = 0 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} g\ '\ (0^-) = -1 \\ g\ '\ (0^+) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1$$

Los valores buscados son m == - 1 y n = 0.

10. En la gráfica adjunta está representada la función y = f (x). Calcula, de forma razonada:



a) D f (- 2) **b) D f (- 1)** **c) D f (0)** **d) D f (1)**

En cada caso:

a) D f (- 2) = - 9, que es la pendiente de la recta tangente, de ecuación y = - 9x – 18, a la función en x = - 2.

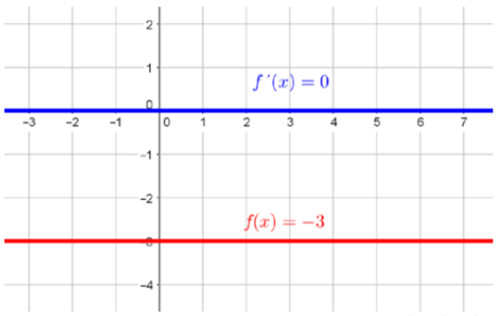
Razonando de forma análoga:
b) D f (- 1) = 0 c) D f (0) = 3 d) D f (1) = 0

11. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones y representa, en el mismo diagrama, la función y su función derivada.
a) f (x) = - 3 **c) f (x) = $3x^2$ – 6x**

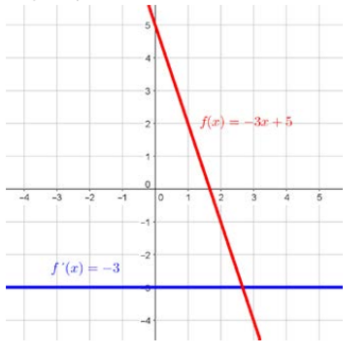
b) f (x) = - 3x + 5 **d) f (x) = x^3 – 12x + 8**

Las gráficas de las funciones propuestas pueden verse en color rojo y las de sus funciones derivadas en color azul.

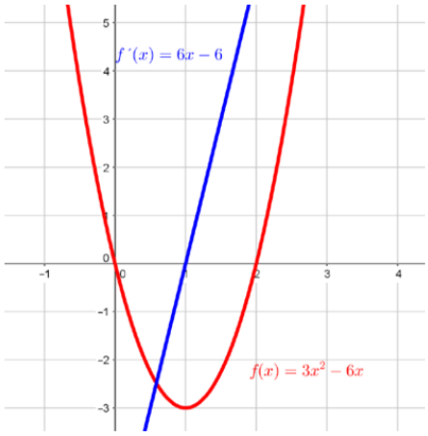
a) La función f (x) = - 3 y su función derivada f ´(x) = 0.



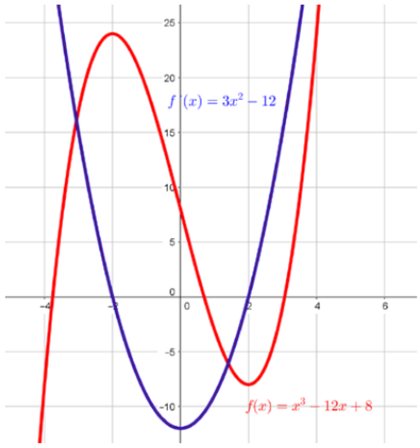
b) La función f (x) = - 3x + 5 y su función derivada f ´ (x) = - 3.



c) La función f (x) = $3x^2 - 6x$ y su función derivada f ´ (x) = $6x - 6$.



d) La función f (x) = $x^3 - 12x + 8$ y su función derivada f ´(x) = $3x^2 - 12$.



■ 12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D\left[2x^3 + 3\sqrt[3]{x^2}\right]$

b) $D\left[3x^2 \cdot \sqrt{x^3}\right]$

c) $D\left[(x^3 - 2)^4\right]$

d) $D\left[x^3 \cdot 3^x\right]$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]$

j) $D\left[(2^{3x} - 5)^3\right]$

k) $D\left[10^{x^2} + 10^x + 10\right]$

l) $D\left[\sqrt{2 - 5e^x}\right]$

m) $D\left[(1 - x^2) \cdot e^x\right]$

n) $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1 + x^2}\right]$

r) $D\left[(sen\ x - \cos x)^2\right]$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]$

t) $D\left[tg^2\ x + tg\ x^2\right]$

u) $D\left[\sqrt{x^2 + 3} \cdot sen\ x\right]$

v) $D\left[\dfrac{sen\ x}{1 - sen\ x}\right]$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]$

w) $D\left[e^{tg\ x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]$

o) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]$

x) $D\left[arcsen\ x^3\right]$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]$

p) $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$

y) $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right]$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]$

q) $D\left[\ln^2 x-\ln(\ln x)\right]$

z) $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2x^3+3\sqrt[3]{x^2}\right]=6x+2x^{-1/3}$

b) $D\left[3x^2\cdot\sqrt{x^3}\right]=7x^{4/3}$

c) $D\left[(x^3-2)^4\right]=12x^2(x^3-2)^3$

d) $D\left[x^3\cdot 3^x\right]=x^2\cdot 3^x\cdot(3+x\cdot\ln 3)$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]=\dfrac{\ln 2\cdot x\cdot 2^x-2\cdot 2^x}{x^3}$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]=-\dfrac{6}{(x-1)^3}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]=-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}\,(2x-1)}$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2}$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+1}$

j) $D\left[(2^{3x}-5)^3\right]=9\cdot\ln 2\cdot 2^{3x}\cdot(2^{3x}-5)^2$

k) $D\left[10^{x^2}+10^x+10\right]=2x\cdot\ln 10\cdot 10^{x^2}+\ln 10\cdot 10^x$

l) $D\left[\sqrt{2-5e^{x}}\right]=\dfrac{-5e^{x}}{2\sqrt{2-5e^{x}}}$

m) $D\left[(1-x^{2})\cdot e^{x}\right](-x^{2}-2x+1)\cdot e^{x}$

n) $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1+x^{2}}\right]=\dfrac{(3x^{2}-2x+3)\cdot e^{3x}}{(1+x^{2})^{2}}$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]=\dfrac{e^{1/x}}{x^{2}\cdot\left(1+e^{1/x}\right)^{2}}$

o) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\right]=\dfrac{2e^{x}}{e^{2x}-1}$

p) $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]=-\dfrac{1}{2x\left(1+\sqrt{x}\right)}$

q) $D\left[\ln^{2}x-\ln(\ln x)\right]=\dfrac{2\ln^{2}x-1}{x\cdot\ln x}$

r) $D\left[(sen\ x-\cos x)^{2}\right]=2\cdot(sen^{2}\ x-\cos^{2}x)$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]=-2\ tg\ (2x)$

t) $D\left[tg^{2}\ x+tg\ x^{2}\right]=\dfrac{2\cdot tg\ x}{\cos^{2}x}+\dfrac{2x}{\cos^{2}x^{2}}$

u) $D\left[\sqrt{x^{2}+3}\cdot sen\ x\right]=\dfrac{x\cdot sen\ x+(x^{2}+3)\cdot\cos x}{\sqrt{x^{2}+3}}$

v) $D\left[\dfrac{sen\ x}{1-sen\ x}\right]=\dfrac{\cos x}{(1-sen\ x)^{2}}$

w) $D\left[e^{tg\ x}\right]=\dfrac{e^{tg\ x}}{\cos^{2}x}$

x) $D\left[arcsen\ x^{3}\right]=\dfrac{3x^{2}}{\sqrt{1-x^{6}}}$

y) $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right]=\dfrac{2}{4+x^{2}}$

z) $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right] = \dfrac{1}{2\cdot(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}$

13. Calcula el valor de k para que la derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ **en** $x = \dfrac{1}{2}$ **valga 1.**

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ es $f'(x) = \dfrac{2kx^2+2k^2x-2}{(2x+k)^2}$.

Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ se cumplirá:

$$\frac{\dfrac{2k}{4}+\dfrac{2k^2}{2}-2}{(1+k)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2k^2+k-4}{2k^2+4k+2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

14. Los beneficios acumulados de una empresa, en miles de euros, a los t años de su fundación vienen dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t^2}{t+4} - 4$$

a) ¿Cuál fue la inversión inicial? ¿Cuándo comenzó a tener beneficios?

b) ¿Cuáles fueron las ganancias medias por año en los cinco y diez primeros años?

c) ¿Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento al final del primero, quinto y décimo año?

a) La inversión inicial fue de 4000 euros, al ser los beneficios iniciales $B(0) = \dfrac{2\cdot 0^2}{0+4} - 4 = -4$.

Para saber cuando la empresa comenzó a tener beneficios debe cumplirse B (t) > 0. Resolvemos la inecuación anterior y obtenemos:

$$B(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t^2}{t+4} - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t^2-4t-16}{t+4} > 0 \quad \Rightarrow \quad t > 4$$

La empresa comienza a tener beneficios a partir del cuarto año.

b) Las ganancias medias por año durante los cinco primeros años fueron:

$$\frac{B(5)-B(0)}{5} = \frac{1{,}56-(-4)}{5} = 1{,}11111$$, es decir 1 111,11 euros.

Las ganancias medias por año durante los diez primeros años fueron:

$$\frac{B(10)-B(0)}{10} = \frac{10{,}29-(-4)}{10} = 1{,}42857$$, es decir 1 428,57 euros.

c) Las velocidades instantáneas de crecimiento en los años pedidos son:

En el primer año: $B'(1) = \dfrac{2 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1}{(1+4)^2} = 0{,}72$

En el quinto año: $B'(5) = \dfrac{2 \cdot 5^2 + 16 \cdot 5}{(5+4)^2} = 1{,}60$

En el décimo año: $B'(10) = \dfrac{2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10}{(10+4)^2} = 1{,}84$

En la imagen puede verse la gráfica de la función en color rojo y la gráfica de su función derivada en color azul. En los puntos A, B y C aparecen los valores de las velocidades instantáneas de crecimiento en los años 1, 5 y 10.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 172

1. La población de una pequeña comunidad rural varía de acuerdo con la función:

$$P\ (t) = \frac{10\ 000}{1 + 4e^{-0,1t}}$$

a) Encuentra el incremento de población en los primeros 5 años, y en los primeros 10 años. Halla, en ambos casos, los correspondientes incrementos medios anuales de población.

b) Calcula los incrementos instantáneos de población en los años quinto y décimo.

a) Los incrementos de población fueros:

- En los primeros 5 años: P (5) – P (0) ≈ 2919 – 2000 = 919 habitantes.

- En los primeros 10 años: P (10) – P (0) ≈ 4046 – 2000 = 2046 habitantes.

Los incrementos medios de población fueron:

- En los primeros 5 años: $\frac{P\ (5) - P\ (0)}{5} = \frac{919}{5} = 183{,}8$ habitantes/año

- En los primeros 10 años: $\frac{P\ (10) - P\ (0)}{10} = \frac{204619}{10} = 204{,}6$ habitantes/año.

b) La función derivada de P (t) es $P\ '\ (t) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1t}}{(1 + 4e^{-0,1t})^2}$.

Los incrementos instantáneos pedidos son:

- En el quinto año: $P\ '\ (5) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}}{(1 + 4e^{-0,1 \cdot 5})^2} = 206{,}68$ habitantes/año.

- En el décimo año: $P\ '\ (10) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1 \cdot 10}}{(1 + 4e^{-0,1 \cdot 10})^2} = 240{,}90$ habitantes/año.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

a) Determina sus puntos de discontinuidad y su derivada en x = - 2 y x = 2.

b) Explica la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media en un punto, indicando lo que significa el valor de la derivada de la función f(x) en x = 2.

a) La función f(x) es continua para cualquier número real salvo para x = - 2 donde presenta una discontinuidad, al cumplirse:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} \frac{x-2}{x+2} = +\infty \\ \lim_{x \to -2^+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x+2}\ \textit{no existe}$$

La función derivada de la función f(x) es $f\,'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, válida para R – {- 2}.

La derivada en x = - 2 no existe al ser en dicho punto discontinua.

La derivada en x = 2 vale f ´ (2) = $\dfrac{4}{(2+2)^2} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

b) La tasa de variación media de la función f(x) en un entorno de centro 2 y radio h vale:

$$t_{vm}[2-h,\,2+h] = \frac{f(2+h)-f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \frac{\dfrac{2+h-2}{2+h+2} - \dfrac{2-h-2}{2-h+2}}{2h} = \frac{\dfrac{h}{4+h} + \dfrac{h}{4-h}}{2h} = \frac{4}{16-h^2}$$

La derivada en el punto 2 es:

$$f\,'(2) = \lim_{h\to 0} t_{vm}[2-h,\,2+h] = \operatorname*{Lím}_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \operatorname*{Lím}_{h\to 0} \frac{4}{16-h^2} = \frac{1}{4}$$

El valor de la derivada en el punto x = 2 es el valor de la tasa de variación instantánea en x = 2 o la pendiente de la recta tangente trazada en la gráfica de la función en x = 2.

3. Determina a y b para que la función siguiente sea derivable en x = 2.

$$f\,(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable en x = 2, tiene que ser continua en ese punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f\,(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f\,(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -\,2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 2b = -\,6$$

Además las derivadas laterales en x = 2 tienen que coincidir. Si $f\,'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si\ x \le 2 \\ 2x - b & si\ x > 2 \end{cases}$ se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-) = 4a + 3 \\ f\,'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + b = 1$$

Los valores buscados son la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -\,6 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\,7 \end{cases}$$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva f (x) = $x^3 - x^2 + x + 1$ que tiene pendiente m = 2.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación:

$$f\,'(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (1, f (1)) = (1, 2) es:

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 0.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(-\dfrac{1}{3},\, f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{3},\, \dfrac{14}{27}\right)$ es:

$$y - \frac{14}{27} = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + \frac{32}{27} \quad \Rightarrow \quad 54x - 27y = -32$$

5. La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, - 2) es tangente a la curva y = x³. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (0, - 2) y tiene pendiente 3 es y = 3x – 2.

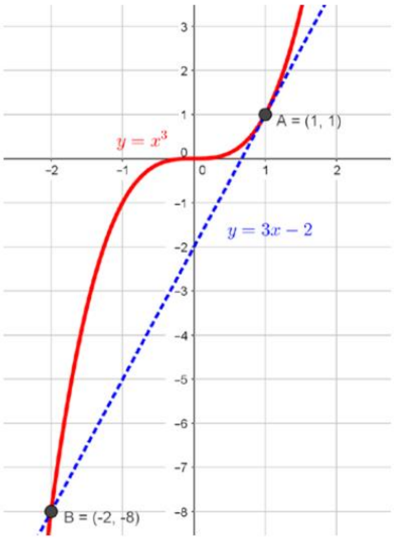
Resolvemos el sistema cuyas ecuaciones son las de la curva y la de la tangente y obtenemos:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -8 \end{cases}$$

El punto de tangencia tiene de coordenadas (1, 1).

El punto (- 2, - 8) es un punto de corte entre la curva y la tangente.

Puede observarse en la imagen.



6. Halla el punto de la gráfica de la función $f\,(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ **en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.**

La derivada de la función es f ´ (x) = 4x – x².

La abscisa del punto de tangencia es la solución de la ecuación 4x – x² = 4, es decir, x = 2. El punto pedido es $\left(2,\, \dfrac{16}{3}\right)$.

7. Calcula las derivadas de las funciones que se indican a continuación:

a) $D\left[2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}\right]$ **d)** $D\left[e^{\sqrt{x \cdot (1 - x)}}\right]$ **g)** $D\left[\dfrac{x^2 - 2}{\ln\, x}\right]$

b) $D\left[\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]$

h) $D\left[\ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]$

c) $D\left[\dfrac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]$

f) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]$

i) $D\left[arctg\ \dfrac{x-1}{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2^{5x}+\dfrac{1}{x^2}\right]=5\cdot\ln 2\cdot 2^{5x}-\dfrac{2}{x^3}$

b) $D\left[\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]=-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

c) $D\left[\dfrac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]=\dfrac{7}{6x^2\sqrt[6]{2x}}$

d) $D\left[e^{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\right]=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot e^{\sqrt{x-x^2}}$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]=\dfrac{(2x^2+4x-4)\cdot e^{-2x}}{(2-x^2)^3}$

f) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]=\dfrac{1}{2\,(1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}}$

g) $D\left[\dfrac{x^2-2}{\ln x}\right]=\dfrac{2x^2\cdot\ln x-x^2+2}{x\cdot\ln^2 x}$

h) $D\left[\ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]=\dfrac{3x+12}{2x\,(x+3)}$

i) $D\left[arctg\ \dfrac{x-1}{x+1}\right]=\dfrac{1}{1+x^2}$

8. El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del mes de enero viene dado por la función:

$N(t) = 100 + 200\cdot e^{0{,}2\,t}$

donde t representa el número de días transcurridos a partir del 1 de enero.

a) ¿Cuántos enfermos había el citado día 1 de enero?

b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de la evolución del número de enfermos al cabo de t días.

c) Determina la fecha en la cuál la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803 enfermos/día.

a) El número de enfermos al comienzo del día 1 de enero era de N (0) = 100 + 200 · $e^{0,2 \cdot 0}$ = 300.

b) La velocidad de evolución del número de enfermos está dad por la derivada, es decir, por la función:

$N'(t) = 200 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2 \cdot t}$, es decir, $N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t}$

c) Resolviendo la ecuación:

$$N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t} = 803 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0,2} \cdot \ln \frac{803}{40} \approx 15$$

Por tanto, la velocidad de evolución del número de enfermos fue de 803 enfermos/día al finalizar el día 15 de enero.

ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Una piscina se vacía según la función $V = t^2 + 10t$ donde V es el volumen expresado en m³ y t el tiempo en minutos. Halla la velocidad media de vaciado de la piscina en el intervalo de tiempo [2, 10].

La velocidad media de vaciado, o tasa de variación media, en el intervalo [2, 10] viene dada por:

$$V_m = t_{vm}\left[2,\ 10\right] = \left[\frac{\Delta V}{\Delta t}\right]_{[2,\ 10]} = \frac{V(10) - V(2)}{10 - 2} = \frac{200 - 24}{8} = 22 \text{ m}^3/\text{minuto}$$

Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por la expresión:

$$e = f(t) = 20t - 2t^2$$

a) Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$.

b) ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así, ¿a qué altura sucedió?

a) Para hallar la velocidad media en el intervalo [0, 5]:

$$v_m = t_{vm}\left[0,\ 5\right] = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{50 - 0}{5 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

b) Hallaremos la derivada de $f(t)$ y obtendremos la velocidad instantánea:

$$\text{velocidad } (t) = f'(t) = -4t + 20$$

$$v(t) = -4t + 20 = 15 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5}{4} \text{ segundos}$$

Para el tiempo $t = \frac{5}{4}$ s, la velocidad de la piedra es de 15 m/s y la altura:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 20 \cdot \frac{5}{4} - 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25 - \frac{50}{16} = \frac{350}{16} = 21{,}875 \text{ m}$$

Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

La función derivada o derivada viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 5(x+h) + 1 - (2x^2 - 5x + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 1 - 2x^2 + 5x - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 5h}{h} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h - 5)}{h} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 5) = 4x - 5$$

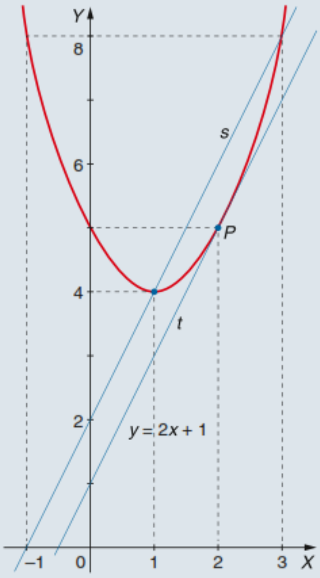
Halla un punto de la gráfica de $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x - 8$.

La recta tangente, al ser paralela a la recta $y = 3x - 8$, tendrá igual pendiente, es decir, $m = 3$. Por la interpretación geométrica de la derivada sabemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de tangencia. Por tanto:

$$f'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2x_0 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

El punto pedido es $(x_0, f(x_0)) = (1, f(1)) = (1, 7)$.

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, halla la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.



- La ecuación de la recta secante la determinamos teniendo en cuenta que pasa por los puntos (1, 4) y (3, 8):

$$s : y = mx + b \left\{ \begin{array}{l} (1, 4) \in s \Rightarrow 4 = m + b \\ (3, 8) \in s \Rightarrow 8 = 3m + b \end{array} \right\} \Rightarrow m = 2;\ b = 2$$

Luego, la ecuación de la recta secante es:

$$s: y = 2x + 2$$

- La recta tangente, por ser paralela a la secante, tendrá la misma pendiente $m = 2$.

Para hallar la ecuación de la recta tangente necesitamos conocer el punto P de tangencia.

$$y'_P = m_{\text{recta tangente en } P} = 2$$

$$2x - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, y(2)) = P(2, 5)$$

La ecuación de la recta t tangente en P es:

$$y - 5 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad t: y = 2x + 1$$

De un polinomio de tercer grado $P_3(x)$ se sabe que $P_3(1) = 0$, $P'_3(1) = 2$, $P''_3(1) = 4$ y $P'''_3(1) = 12$. Calcula $P_3(2)$.

El polinomio $P_3(x)$ será de la forma:

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Imponiéndole las condiciones del enunciado, obtenemos:

- $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\quad P_3(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 0$
- $P'_3(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $\quad P'_3(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 2$
- $P''_3(x) = 6ax + 2b$; $\quad P''_3(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 4$
- $P'''_3(x) = 6a$; $\quad P'''_3(1) = 12 \quad \Rightarrow \quad 6a = 12$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a = 2 \quad b = -4 \quad c = 4 \quad d = -2$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

Luego, $P_3(2)$ vale:

$$P_3(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = 6$$