ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ c) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ d) $k(x) = \sqrt{x+5}$

2. Una empresa que fabrica componentes electrónicos ha comprobado que la variación de la demanda, D, de un determinado producto en función de su precio varía de acuerdo con la expresión:

$$D(x) = 1\,000 - 2x^2$$

   a) Determina la variación de la demanda si el precio cambia de 5 a 10 euros.

   b) Calcula la variación media de la demanda en el intervalo de precios [5, 15].

   c) Averigua la variación instantánea de la demanda para $x = 5$.

3. El crecimiento de una colonia de bacterias viene dado por la siguiente expresión en función del tiempo $P(t) = t^2 + 40t + 100$, donde este viene dado en minutos.

   a) ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento entre el comienzo del cultivo y pasados diez minutos?

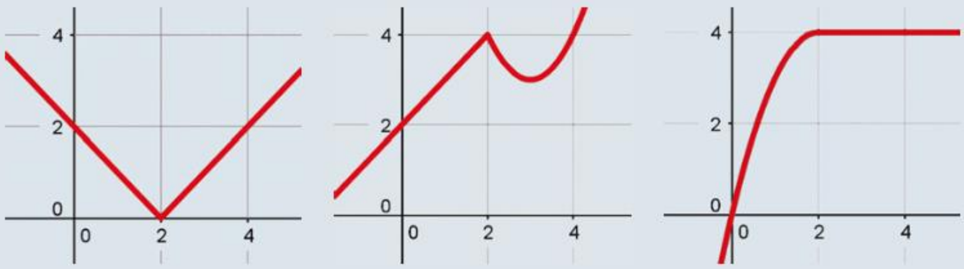
   b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a los diez minutos?

4. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 2x - x^2$; $D[f(1)]$ b) $f(x) = \sqrt{x-3}$; $f'(7)$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$; $D[f(3)]$

5. Haciendo uso del concepto de derivada lateral en un punto, estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 2$. Para cada una de ellas representa gráficamente su función derivada.

   a) $f(x) = |2 - x|$ b) $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } > 2 \end{cases}$



6. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 2x^3 + x$ en $x_0 = 0$ b) $g(x) = \dfrac{6}{x}$ en $x_0 = 2$ c) $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en $x_0 = 3$

7. Sea la curva de ecuación $y = -x^3 + 11x$. Halla las ecuaciones de sus rectas tangentes que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

8. Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^3}$ en los que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación $y = 2$.

9. ¿Para qué valores de m y n cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

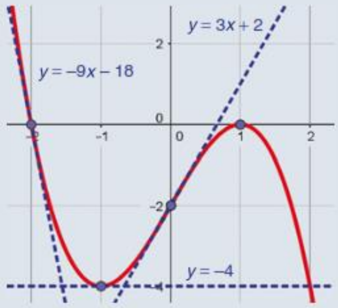
10. En la gráfica adjunta está representada la función $y = f(x)$. Calcula, de forma razonada:

a) $D\ f(-2)$

b) $D\ f(-1)$

c) $D\ f(0)$

d) $D\ f(1)$



11. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones y representa, en el mismo diagrama, la función y su función derivada.

a) $f(x) = -3$

b) $f(x) = -3x + 5$

c) $f(x) = 3x^2 - 6x$

d) $f(x) = x^3 - 12x + 8$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D\left[2x^3 + 3\sqrt[3]{x^2}\right]$

b) $D\left[3x^2 \cdot \sqrt{x^3}\right]$

c) $D\left[(x^3 - 2)^4\right]$

d) $D\left[x^3 \cdot 3^x\right]$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]$

h) $D\left[\dfrac{2x^3 + x^2}{x-1}\right]$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2} + 5^{2x+1}\right]$

j) $D\left[(2^{3x} - 5)^3\right]$

k) $D\left[10^{x^2} + 10^x + 10\right]$

l) $D\left[\sqrt{2 - 5e^x}\right]$

m) $D\left[(1 - x^2) \cdot e^x\right]$

n) $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1 + x^2}\right]$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1 + e^{1/x}}\right]$

o) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)\right]$

p) $D\left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$

q) $D\left[\ln^2 x - \ln(\ln x)\right]$

r) $D\left[(\text{sen}\ x - \cos x)^2\right]$

s) $D[\ln[\cos(2x)]]$

t) $D\left[\text{tg}^2\ x + \text{tg}\ x^2\right]$

u) $D\left[\sqrt{x^2 + 3} \cdot \text{sen}\, x\right]$

v) $D\left[\dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x}\right]$

w) $D\left[e^{\text{tg}\, x}\right]$

x) $D\left[\text{arcsen}\ x^3\right]$

y) $D\left[\text{arctg}\ \dfrac{x}{2}\right]$

z) $D\left[\text{arctg}\ \sqrt{x+1}\right]$

13. Calcula el valor de k para que la derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2 + 1}{2x + k}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.

14. Los beneficios acumulados de una empresa, en miles de euros, a los t años de su fundación vienen dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t^2}{t + 4} - 4$$

a) ¿Cuál fue la inversión inicial? ¿Cuándo comenzó a tener beneficios?

b) ¿Cuáles fueron las ganancias medias por año en los cinco y diez primeros años?

c) ¿Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento al final del primero, quinto y décimo año?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. La población de una pequeña comunidad rural varía de acuerdo con la función:

$$P(t) = \frac{10\,000}{1 + 4\,e^{-0,1t}}$$

a) Encuentra el incremento de población en los primeros 5 años, y en los primeros 10 años. Halla, en ambos casos, los correspondientes incrementos medios anuales de población.

b) Calcula los incrementos instantáneos de población en los años quinto y décimo.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2};\ x \neq -2 \\ 0;\ x = -2 \end{cases}$

a) Determina sus puntos de discontinuidad y su derivada en $x = -2$ y $x = 2$.

b) Explica la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media en un punto, indicando lo que significa el valor de la derivada de la función $f(x)$ en $x = 2$.

3. Determina a y b para que la función siguiente sea derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ que tiene pendiente $m = 2$.

5. La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, –2) es tangente a la curva $y = x^3$. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

6. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

7. Calcula las derivadas de las funciones que se indican a continuación:

a) $D\left[2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}\right]$

b) $D\left[\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]$

c) $D\left[\dfrac{\sqrt{3x^3} - \sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]$

d) $D\left[e^{\sqrt{x \cdot (1-x)}}\right]$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{(2 - x^2)^2}\right]$

f) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{1 - \ln x}}\right]$

g) $D\left[\dfrac{x^2 - 2}{\ln x}\right]$

h) $D\left[\ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 3}}\right]$

i) $D\left[\operatorname{arctg} \dfrac{x - 1}{x + 1}\right]$

8. El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del mes de enero viene dado por la función:

$$N(t) = 100 + 200 \cdot e^{0,2t}$$

donde t representa el número de días transcurridos a partir del 1 de enero.

a) ¿Cuántos enfermos había el citado día 1 de enero?

b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de la evolución del número de enfermos al cabo de t días.

c) Determina la fecha en la cuál la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803 enfermos/día.