APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en x_0

EXTREMOS RELATIVOS

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} \bullet\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } \big(x_0, f(x_0)\big) \\ \bullet\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } \big(x_0, f(x_0)\big) \end{cases}$$

aplicación ↓

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

CONCAVIDAD

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacias las y positivas en el punto $(x_0, f(x_0))$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacias las y negativas en el punto $(x_0, f(x_0))$

PUNTOS DE INFLEXIÓN

- $f''(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$

ACTIVIDADES FINALES

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 6x$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

2. Estudia la monotonía de las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3. Una cadena de televisión decide emitir un nuevo programa en la franja horaria de las 17:00 horas a las 21:00 horas. El porcentaje P de audiencia de la primera emisión en función del tiempo t, medido en horas, viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{1}{5}\left(-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690\right),\ 17 \leq t \leq 21$$

Los directivos de la cadena acuerdan que el programa seguirá emitiéndose si en algún momento se consigue un porcentaje de audiencia superior al 20 %.

a) Encuentra en qué intervalos de tiempo la audiencia del programa aumentó y en cuáles disminuyó.

b) En vista de los resultados, ¿seguirá emitiéndose el programa?

4. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$

b) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$

d) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$

e) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

5. Halla a y b para que la función $f(x) = -2x^2 + ax - b$ tenga un máximo en (2, 2).

6. Determina el valor de a para que la función $f(x) = x \cdot \ln\dfrac{x}{a}$, $a > 0$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$.

7. La función $f(x) = x^3 + mx^2 + n$ tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el punto de abscisa $x = 3$. Determina los valores de los parámetros m y n. ¿Tiene algún valor máximo relativo? ¿Cuánto vale?

8. Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$$C(x) = 0{,}2x^2 - 50x + 2\,500$$

Si cada bolso se vende a 90 €, se pide:

a) Determina la función que expresa los beneficios (ingresos – costes) en función de x, número de unidades producidas.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que el beneficio sean máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

9. En una almazara (factoría donde se obtiene aceite) el coste medio por litro, en euros, que supone la fabricación de x litros de una determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C(x) = 0{,}002x^2 - 5x + 3\,127$$

Determina el número de litros que han de producirse para minimizar dicho coste medio por litro y el valor mínimo del citado coste medio.

10. ¿Cuál es el número positivo que sumado con su recíproco da una suma mínima?

11. Descompón el número 60 en dos sumandos tales que el triple del cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese mínimo?

12. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 metros, ¿cuál es el que tiene diagonal menor?

13. Un fabricante de recipientes quiere construir una caja rectangular sin tapa y de base cuadrada, con 108 decímetros cuadrados de material. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo?

14. El mismo fabricante quiere diseñar un contenedor rectangular con tapa, que tenga máximo volumen y que sea doble de largo que de ancho. Para ello dispone de 30 m^2 de chapa. ¿Qué medidas de ancho, largo y alto debe tener el contenedor?

15. El rendimiento de una máquina, a lo largo de las 7 horas que permanece en funcionamiento cada día, viene dado por la función $f(x) = x^3 - 10{,}5\,x^2 + 30x$, donde $x \in (0, 7)$. Indica el número de horas transcurridas desde que la máquina se pone en marcha.

Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento. Calcula el rendimiento de la máquina en esos dos momentos del día.

16. Los beneficios en miles de euros obtenidos en un gimnasio inaugurado hace 5 años vienen dados por la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde $x \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando el gimnasio desde su apertura.

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y cuánto vale ese beneficio máximo?

b) El cuarto año de funcionamiento se produce una renovación general de las instalaciones del gimnasio. Explica razonadamente, en términos de aumento de beneficio, si dicha renovación tuvo éxito.

17. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

d) $f(x) = (x^2 - 14) \cdot e^x$

e) $f(x) = \ln(x + 4)$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

18. Dada la función $f(x) = x^3 - kx^2 + x - 1$; halla k para que tenga un punto de inflexión en $x = 2/3$.

19. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

20. Calcula los coeficientes de $f(x) = ax^2 + be^{2x} + c$, si la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$ con tangente $x - y = 1$.

21. Las ganancias producidas por una máquina embotelladora de agua, que ha durado 6 años, vienen dadas por la función $f(x) = ax^3 + bx^2$, $0 \le x \le 6$ [$f(x)$ representa la ganancia (en miles de €) a los x años de funcionamiento, a y b son constantes].

a) Determina el valor de a y b, si se sabe que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto (2, 32).

b) Si $a = -2$ y $b = 12$, calcula el año en el que la máquina ha producido la mayor ganancia y el valor de dicha ganancia. Para estos valores de a y b representa la función $f(x)$ en [0, 6].

22. Halla los coeficientes a, b, c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es $3x + y = 3$ y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Según los datos facilitados por el Instituto Nacional de Estadística, el número de nacimientos en una determinada zona geográfica, durante los últimos 25 años, se justa a la función siguiente:

$$N(t) = t^3 - 36t^2 + 240t + 8\,000,\ 1 \le t \le 25$$

donde N es el número de nacimientos y t es el año objeto de estudio. Se pide:

a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de nacimientos en los 25 años.

b) ¿En qué años se obtienen el número máximo y el número mínimo de nacimientos? ¿Cuáles son dichos valores máximo y mínimo?

2. Sea $y = f(x)$ una función polinómica de grado 3, con un máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(2, -4)$. Determina la expresión de la función y haz una gráfica aproximada de ella.

3. Estudia la monotonía y la curvatura de las funciones:

a) $f(x) = x \cdot (5 - x)^2$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

4. Sean x e y dos números reales tales que $x + y = 10$. ¿Cuál es el mayor valor posible del producto $(x + 1) \cdot (y - 1)$?

5. Se quieren vallar dos campos de deporte rectangulares iguales y un lado común con 600 m de valla (se trata de vallar el contorno de ambos y el lado de separación). Halla las dimensiones si los cercados encierran una superficie máxima.

6. Se desea construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada y con una capacidad de 360 m^3. Los costes por m^2 son los siguientes: 40 € para el fondo, 30 € para las paredes laterales y 60 € para el techo del depósito. Calcula las dimensiones del depósito para que el coste sea el menor posible.

7. Sea una función $f(x)$ de la que se conoce su derivada $f'(x) = x^2 - 1$.

a) Representa gráficamente $f'(x)$.

b) Deduce de la gráfica los intervalos de crecimiento de $f(x)$.

c) Halla la abscisa de los puntos máximos y mínimos de $f(x)$.

8. El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función:

$$f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84,\ 0 \le t \le 5$$

siendo t el tiempo en años.

a) Calcula los saldos inicial y final.

b) ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?

c) Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento del saldo.

9. Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acude un día a un supermercado, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t) = at^2 + bt$, $0 \le t \le 8$, siendo a y b números reales.

Sabiendo que el máximo número de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcula a y b.

AUTOEVALUACIÓN

1. La función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ es monótona decreciente en:

   a) $(-\infty, 0)$ b) $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ c) $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

2. En una ciudad, el registro durante cinco horas de la humedad relativa del aire, medida en %, se ajusta a la función $f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 75$, $0 < t < 5$, siendo t el tiempo medido en horas. La hora a la que se registró la máxima cantidad de humedad relativa y dicha cantidad fue:

   a) 1.ª hora y 86 % b) 2.ª hora y 68 % c) 4.ª hora y 59 %

3. En el punto (2, 1) la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4x - 4}$ tiene un:

   a) Mínimo relativo b) Máximo relativo c) Punto de inflexión

4. Al descomponer el número 90 en dos sumandos positivos de manera que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo, obtenemos los números:

   a) 50 y 40 b) 40 y 50 c) 30 y 60

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ en su punto de inflexión es:

   a) $7x - y = 3$ b) $7x + y = 3$ c) $7x + y = -3$