

# 6

## Derivadas



1. Tasas de variación media e instantánea
2. Derivada de una función en un punto
3. Derivadas laterales
4. Interpretación geométrica de la derivada
5. Continuidad de las funciones derivables
6. Función derivada. Derivadas sucesivas
7. Derivadas de las operaciones con funciones
8. Derivadas de las funciones elementales

# 6

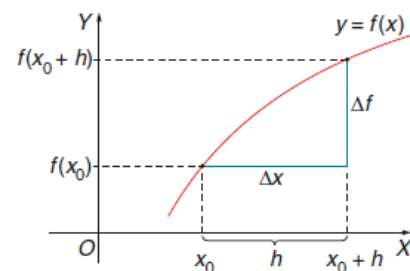
## Derivadas

### 1. Tasas de variación media e instantánea



- Llamamos tasa de variación media de una función  $f$  entre los valores  $x_0$  y  $x_0 + h$  al cociente entre el incremento que experimenta la variable dependiente y el de la variable independiente:

$$t_{vm}[x_0, x_0 + h] = \left[ \frac{\Delta f}{\Delta x} \right]_{[x_0, x_0+h]} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



- Llamamos tasa de variación instantánea de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  al límite, cuando  $h$  tiende a cero, de la tasa de variación media:

$$t_{vi}[x_0] = \lim_{h \rightarrow 0} t_{vm}[x_0, x_0 + h]$$
$$t_{vi}[x_0] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta f}{\Delta x} \right]_{[x_0, x_0+h]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# 6

## Derivadas

### 2. Derivada de una función en un punto



La tasa de variación instantánea de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  se llama derivada de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x_0$ .

- La derivada de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  es el límite, cuando  $h$  tiende a cero, del cociente incremental  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  entre  $h$ :

$$f'(x_0) = D[f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cuando una función tiene derivada en un punto, se dice que es **derivable** en ese punto. Una definición equivalente a la anterior de derivada de una función en un punto es la siguiente:

$$f'(x_0) = D[f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



- La derivada lateral por la derecha de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  se define como:

$$D[f(x_0^+)] = f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- La derivada lateral por la izquierda de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  se define como:

$$D[f(x_0^-)] = f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- La condición necesaria y suficiente para que una función  $f$  sea derivable en un punto de abscisa  $x_0$  es que existan las derivadas laterales y que sean iguales:

$$\exists D[f(x_0)] \Leftrightarrow \begin{cases} \exists D[f(x_0^+)] \text{ y } \exists D[f(x_0^-)] \\ D[f(x_0^+)] = D[f(x_0^-)] \end{cases}$$

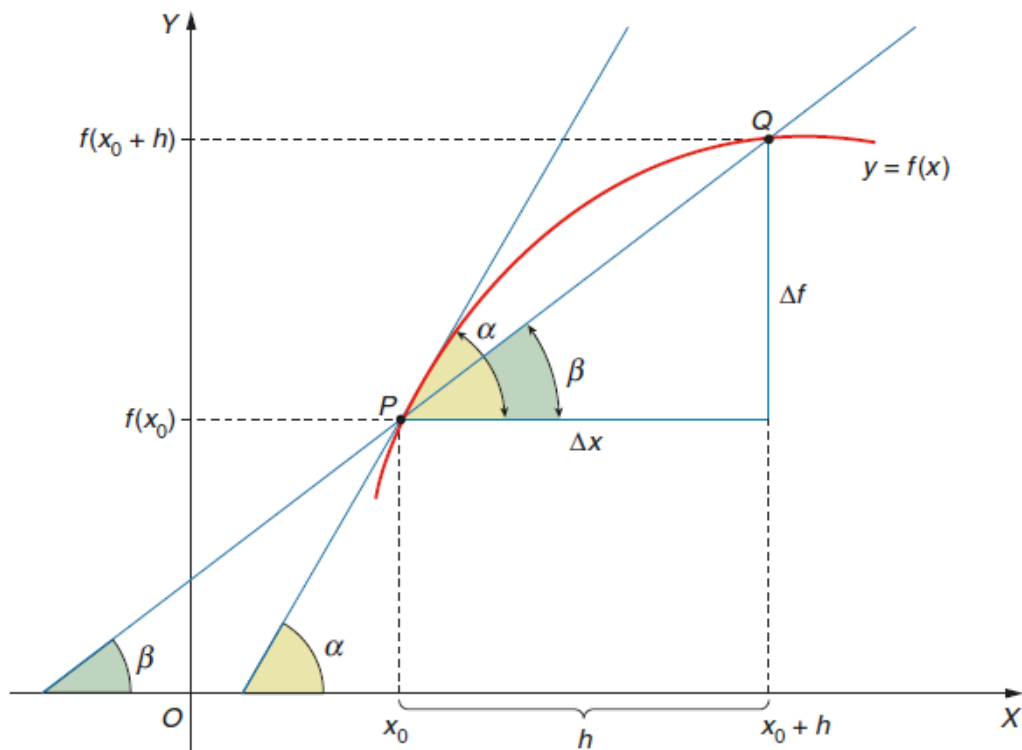
# 6

## Derivadas

### 4. Interpretación geométrica de la derivada



$$t_{vm}[x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{tg} \beta$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow D[f(x_0)] = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

# 6

## Derivadas

### 4. Interpretación geométrica de la derivada



- La derivada de una función  $f$  en un punto de abscisa  $x_0$  coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa  $x_0$ :

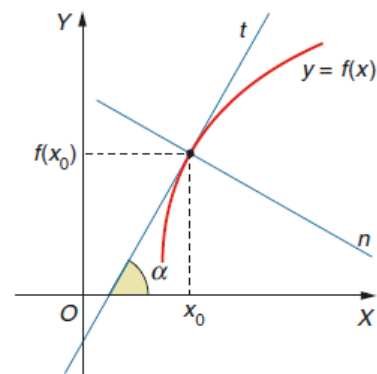
$$D[f(x_0)] = f'(x_0) = m_{\text{recta tangente}} \text{ en } x_0$$

### Ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en un punto

- Las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función  $f$  en el punto  $P(x_0, f(x_0))$  son:

- recta tangente:  $y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$

- recta normal:  $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)$



$$m_{\text{recta tangente}} = \text{tg } \alpha$$

- $t$ : recta tangente a  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$
- $n$ : recta normal a  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$

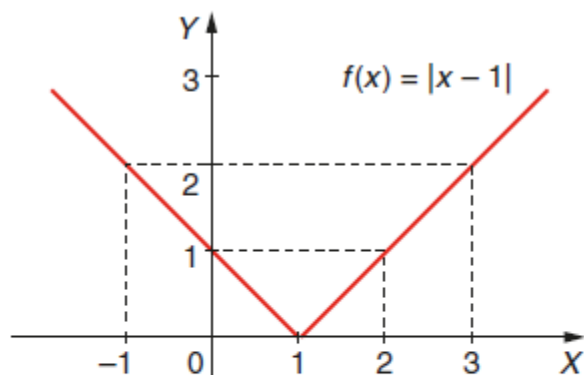
# 6

## Derivadas

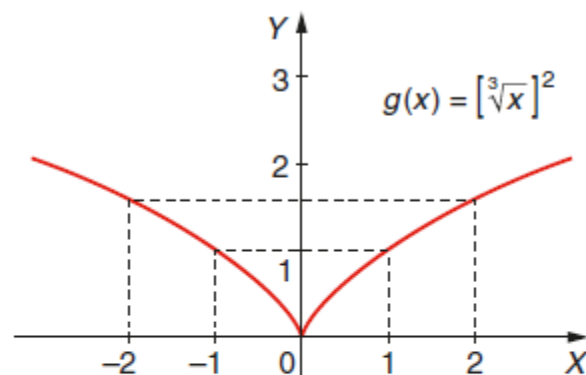
### 5. Continuidad de las funciones derivables



- Toda función  $f$  derivable en un punto, con derivada finita, es continua en ese punto.



- continua en  $x = 1$
- no derivable en  $x = 1$
- $f'(1^+) = 1$ ;  $f'(1^-) = -1$



- continua en  $x = 0$
- no derivable en  $x = 0$
- $g'(0^+) = +\infty$ ;  $g'(0^-) = -\infty$

# 6

## Derivadas

### 6. Función derivada. Derivadas sucesivas



- La función derivada de una función  $f$  dada, o simplemente derivada, es una función que asocia a cada  $x$ , donde la función es derivable, su derivada  $f'(x)$ :

$$\begin{array}{ccc} f' : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

$$f'(x) = D[f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El conjunto  $\text{Dom } f'$  o dominio de derivabilidad de  $f$  está formado por todos los elementos de  $\text{Dom } f$  en los cuales  $f$  es derivable; por tanto,  $\text{Dom } f' \subset \text{Dom } f$ .

DERIVADAS SUCESIVAS	
Derivada primera de $f$	$f'(x)$
Derivada segunda de $f$	$f''(x) = (f')'(x)$
Derivada tercera de $f$	$f'''(x) = (f'')'(x)$
Derivada cuarta de $f$	$f^{(4)}(x) = (f''')'(x)$
...	...
Derivada $n$ -ésima de $f$	$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$
...	...



# 6

## Derivadas

### 7. Derivadas de las operaciones con funciones

#### 7.1. Derivada de la suma de dos funciones



- La derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de estas funciones:

$$D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$$

$$\begin{aligned} D[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = D[f(x)] + D[g(x)] \end{aligned}$$

# 6

## Derivadas

### 7. Derivadas de las operaciones con funciones

#### 7.2. Derivada del producto de un número real por una función



- La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función:

$$D[t f(x)] = t \cdot D[f(x)]; t \in \mathbb{R}$$

$$D[t f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t f(x+h) - t f(x)}{h} = t \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = t \cdot D[f(x)]$$

# 6

## Derivadas

### 7. Derivadas de las operaciones con funciones

#### 7.3. Derivada del producto de dos funciones



- La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = D[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$$

$$\begin{aligned} D[f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= D[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot D[g(x)] \end{aligned}$$



- La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, y, todo ello, dividido por el denominador sin derivar al cuadrado.

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\begin{aligned} D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] - \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = \\ &= D[f(x)] \cdot \frac{g(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x)}{[g(x)]^2} \cdot D[g(x)] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot D[g(x)]}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

# 6

## Derivadas

### 7. Derivadas de las operaciones con funciones

#### 7.5. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena



- La derivada de la función compuesta de la función  $f$  con la función  $g$  es igual a la derivada de la función  $g$  por la derivada de la función  $f$ :

$$D[(g \circ f)(x)] = D[g[f(x)]] \cdot D[f(x)]$$

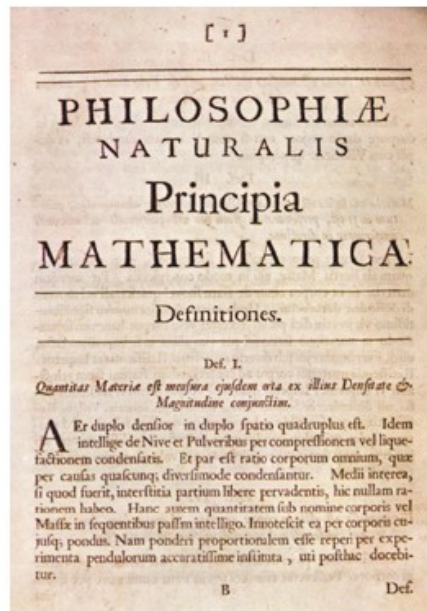
## 8. Derivadas de las funciones elementales

## 8.1. Derivada de la función constante y de la función identidad



- La derivada de la función constante es 0, y la de la función identidad, 1:

$$D[K] = 0 \quad D[x] = 1$$



Isaac Newton (1642-1727)





- La derivada de la función potencial simple  $x^a$  es igual al exponente por la base elevada al exponente menos una unidad:

$$D[x^a] = a \cdot x^{a-1}$$

- La derivada de la función potencial compuesta  $f^a$  es igual al exponente por la base elevada al exponente menos una unidad por la derivada de la base:

$$D[f^a] = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$$



- La derivada de la función irracional simple  $\sqrt[n]{x}$  es igual a la expresión inversa del producto del índice por la raíz del mismo índice de la potencia de exponente  $n - 1$  del radicando  $x$ :

$$D[\sqrt[n]{x}] = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- La derivada de la función compuesta  $\sqrt[n]{f}$  es igual a la expresión inversa del producto del índice por la raíz del mismo índice de la potencia de exponente  $n - 1$  del radicando  $f$ , multiplicada por la derivada de  $f$ :

$$D[\sqrt[n]{f}] = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$





- La derivada de la función exponencial simple  $a^x$  es igual a la misma por el logaritmo neperiano de la base:

$$D[a^x] = a^x \cdot \ln a$$

- La derivada de la función exponencial compuesta  $a^f$  es igual a la misma por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada de la función exponente:

$$D[a^f] = a^f \cdot \ln a \cdot f'$$



- La derivada de la función logarítmica simple  $\log_a x$  es igual a uno dividido por el producto de  $x$  por el logaritmo neperiano de la base:

$$D[\log_a x] = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad D[\ln x] = \frac{1}{x}$$

- La derivada de la función logarítmica compuesta  $\log_a f$  es igual a la derivada de la función  $f$  dividida por el producto de la función  $f$  por el logaritmo neperiano de la base:

$$D[\log_a f] = \frac{f'}{f \cdot \ln a} \quad D[\ln f] = \frac{f'}{f}$$

#### Método de derivación logarítmica

Para derivar la función  $y = f^g$ :

- Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\ln y = \ln f^g \Leftrightarrow \ln y = g \cdot \ln f$$

- Derivamos en ambos miembros:

$$\frac{y'}{y} = g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}$$

- Despejamos  $y'$ :

$$y' = f^g \cdot g' \cdot \ln f + f^g \cdot g \cdot \frac{f'}{f}$$



## Derivada de la función seno

- La derivada de la función simple  $\text{sen } x$  es  $\text{cos } x$ :

$$D[\text{sen } x] = \text{cos } x$$

- La derivada de la función compuesta  $\text{sen } f$  es  $\text{cos } f$  por la derivada de la función  $f$ :

$$D[\text{sen } f] = \text{cos } f \cdot f'$$

## Derivada de la función coseno

- La derivada de la función simple  $\text{cos } x$  es el menos  $\text{sen } x$ :

$$D[\text{cos } x] = -\text{sen } x$$

- La derivada de la función compuesta  $\text{cos } f$  es el menos seno de la función  $f$  por la derivada de la función  $f$ :

$$D[\text{cos } f] = -\text{sen } f \cdot f'$$



## Derivada de la función tangente

- La derivada de la función simple  $\operatorname{tg} x$  es igual a uno más el cuadrado de la tangente:

$$D[\operatorname{tg} x] = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- La derivada de la función compuesta  $\operatorname{tg} f$  es igual a uno más el cuadrado de la tangente de la función  $f$  y, todo ello, multiplicado por la derivada de la función  $f$ :

$$D[\operatorname{tg} f] = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$$



### Derivada de la función arco seno

- La derivada de la función simple  $\arcsen x$  es igual a uno dividido por la raíz cuadrada de uno menos  $x$  al cuadrado:

$$D[\arcsen x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La derivada de la función compuesta  $\arcsen f$  es igual a la derivada de la función  $f$  dividida por la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de  $f$ :

$$D[\arcsen f] = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

### Derivada de la función arco coseno

- La derivada de la función  $\arccos x$  es la opuesta de la derivada de la función arco seno:

$$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D[\arccos f] = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$$



## Derivada de la función arco tangente

- La derivada de la función simple  $\text{arctg } x$  es igual a uno dividido por uno más el cuadrado de  $x$ :

$$D[\text{arctg } x] = \frac{1}{1 + x^2}$$

- La derivada de la función compuesta  $\text{arctg } f$  es igual a la derivada de la función  $f$  dividida por uno más el cuadrado de  $f$ :

$$D[\text{arctg } f] = \frac{f'}{1 + f^2}$$