7 Aplicaciones de las derivadas

1.1. Funciones estrictamente crecientes

- Una función f es estrictamente creciente en un intervalo (a, b) si, y sólo si:

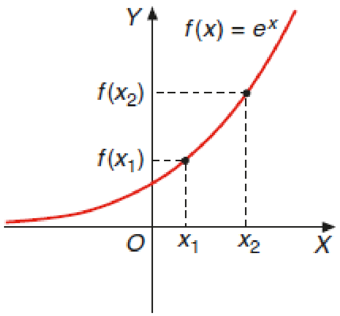
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

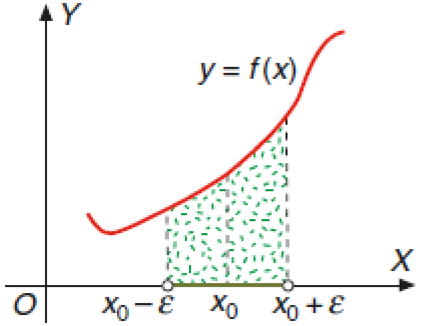
Otra definición equivalente es la siguiente:

$$f \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0; \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b);\ x_1 < x_2$$

- Una función f es estrictamente creciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0, $E(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, en el cual la función es estrictamente creciente.

Función estrictamente creciente





1.2. Funciones estrictamente decrecientes

- Una función f es estrictamente decreciente en un intervalo (a, b) si, y sólo si:

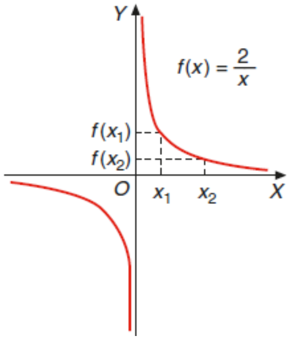
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

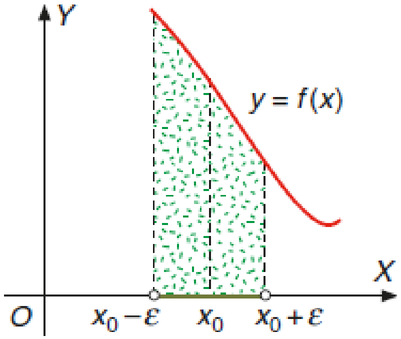
Otra definición equivalente es la siguiente:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0; \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b);\ x_1 < x_2$$

- Una función f es estrictamente decreciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0, $E(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, en el cual la función es estrictamente decreciente.

Función estrictamente decreciente





1. Monotonía: crecimiento y decrecimiento de una función

1.3. Monotonía y derivada

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente en x_0.

Crecimiento estricto en un intervalo

Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$\Downarrow$

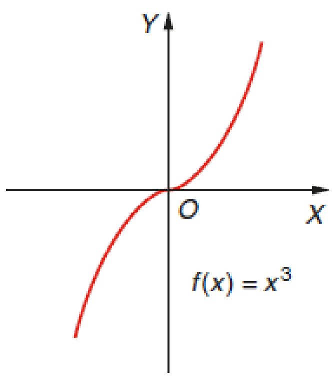
f es estrictamente creciente en (a, b)

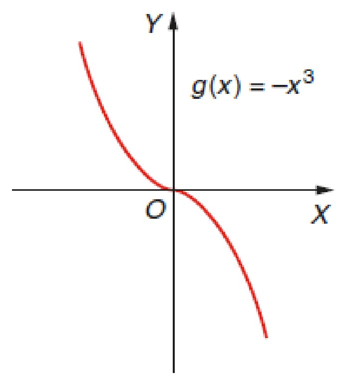
Decrecimiento estricto en un intervalo

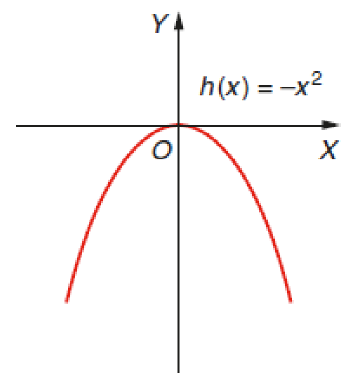
Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$\Downarrow$

f es estrictamente decreciente en (a, b)







2. Extremos relativos. Determinación

- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es negativa, entonces la función f presenta un máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es positiva, entonces la función f presenta un mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Simbólicamente:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)) \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$f^{(n)}(x_0) < 0$; n par	$f^{(n)}(x_0) > 0$; n par
$\Downarrow$	$\Downarrow$
f tiene máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$	f tiene mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

En matemáticas son numerosas las situaciones de **optimización** de funciones; por ejemplo, la determinación de la distancia a la que debemos colocarnos delante de un cuadro para verlo con el mayor ángulo posible (problema de Van Schooten).

Los casos más sencillos de optimización de funciones son aquellos en los que la función a optimizar **depende de una sola variable.** Veamos los **pasos** a seguir para optimizar funciones:

- Optimización de funciones

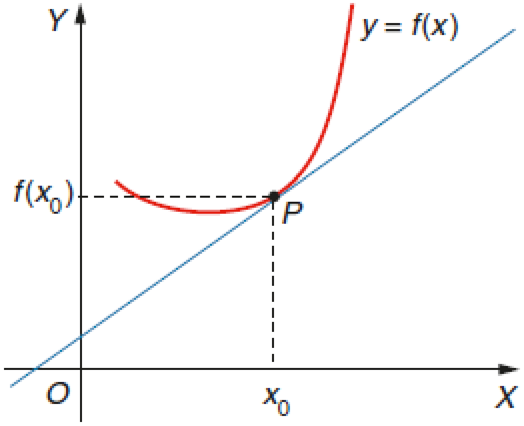
1. Expresar la función que deseamos optimizar.
2. Si la función tiene más de una variable, relacionar las variables con los datos del enunciado para conseguir una función de una variable.
3. Obtener los máximos y los mínimos de la función.
4. Comprobar que los resultados obtenidos tienen sentido y se adecuan a las condiciones del enunciado.

La posición de los puntos de una curva, próximos al punto de abscisa x_0 , respecto de la tangente a la curva en x_0 , nos muestra la **curvatura** de la función, es decir, si la **concavidad es hacia arriba** o **hacia abajo:**

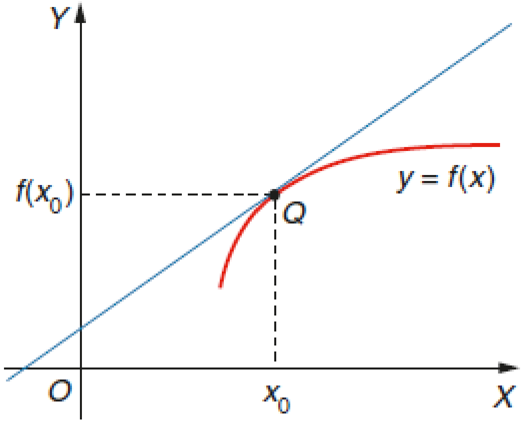
- Una función f es cóncava hacia las y positivas o cóncava hacia arriba en un punto P, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a P están situados por encima de la recta tangente en P.
- Una función f es cóncava hacia las y negativas o cóncava hacia abajo en un punto Q, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a Q están situados por debajo de la recta tangente en Q.

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia las y positivas en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f''(x_0) < 0$, entonces f es cóncava hacia las y negativas en el punto $(x_0, f(x_0))$.

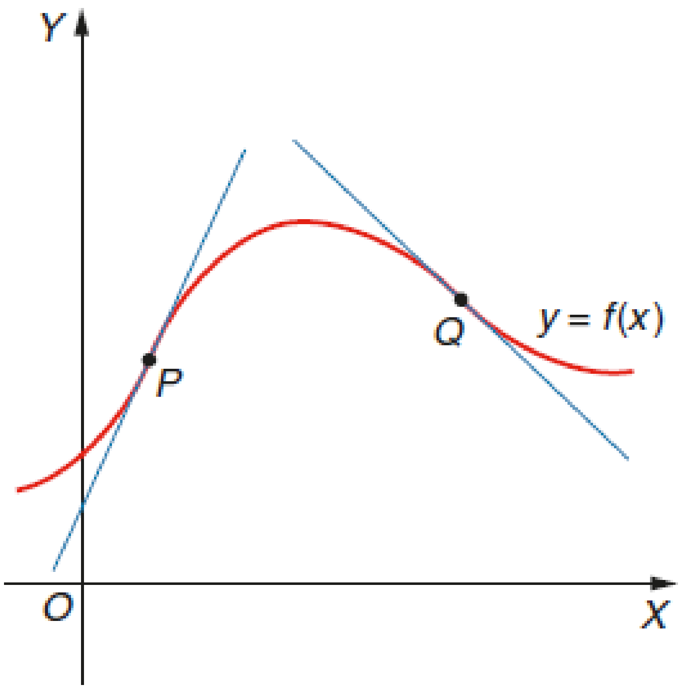
Concavidad hacia las *y* positivas



Concavidad hacia las *y* negativas



- Una función *f* tiene un punto de inflexión en un punto cuando en este punto cambia la concavidad de la función.



- Si una función f tiene su derivada segunda nula en un punto de abscisa x_0, y su derivada tercera en ese punto es distinta de cero, entonces la función f tiene un punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$.

  Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{r} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$

Cuando se anulan la segunda derivada, la tercera derivada, etc., en x_0, siendo el orden de la primera derivada no nula impar, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = x_0$:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \; f^{(n)}(x_0) \neq 0; \; n \text{ impar}$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$