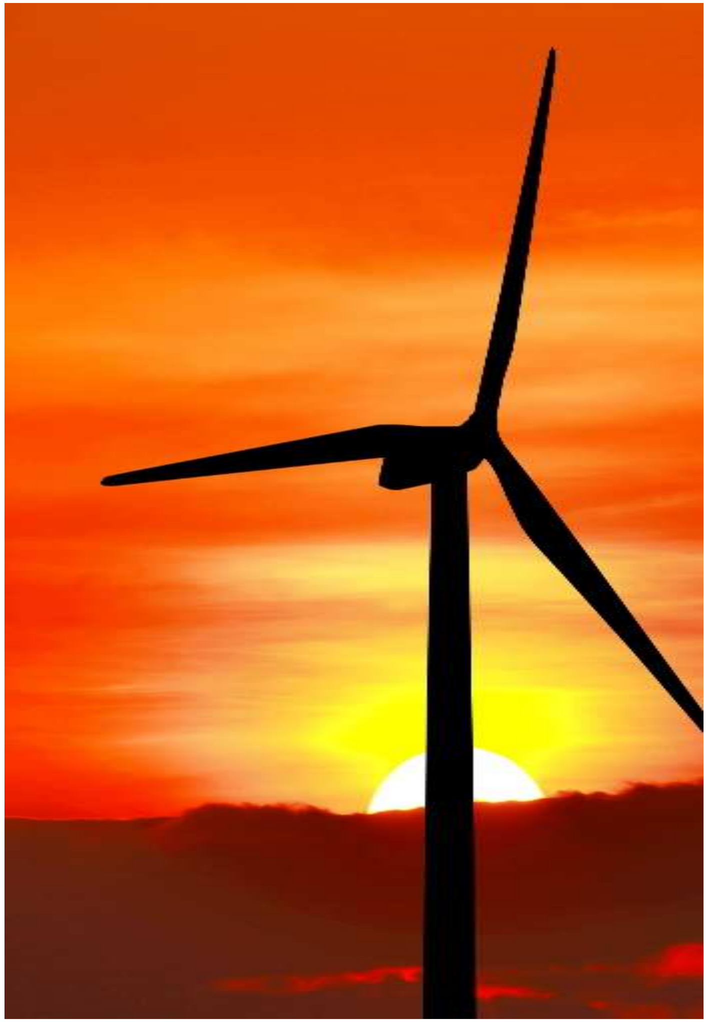
3 Sistemas de ecuaciones lineales



EDITEX
www.editex.es

- Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto formado por m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas en cada una de ellas.

  Podemos escribirlo en la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En el sistema anterior llamamos:

- **coeficientes del sistema** a los números reales *aij* .
- **términos independientes** a los números reales *bi*.
- **incógnitas** a los términos *x*1, *x*2, …, *xn* que deben ser calculados.

Al **resolver un sistema** intentamos encontrar las posibles **soluciones** del mismo. Estas son los valores *x*1 = *n*1, *x*2 = *n*2, …, *xn* = *nn* de las incógnitas que convierten las igualdades del sistema en identidades numéricas.

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases

1.1. Clases de sistemas de ecuaciones lineales

En función del **valor de los términos independientes,** los sistemas de ecuaciones se clasifican en:

- **Homogéneos**, si todos los términos independientes son nulos.
- **No homogéneos**, si alguno de los términos independientes es distinto de cero.

Según su **solución,** los sistemas pueden ser:

- **Incompatibles**, si no tienen solución.
- **Compatibles**, si tienen solución. Estos, a su vez, pueden ser:

  — **Determinados**, cuando la solución es única.

  — **Indeterminados**, cuando poseen infinitas soluciones.

Expresión matricial

- El sistema anterior de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz principal} \\ \text{o matriz de los} \\ \text{coeficientes}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{de las} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz de los} \\ \text{términos} \\ \text{independientes}}}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y = 4 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Expresión vectorial

- Llamando $A_1, A_2, ..., A_n$ a las columnas de la matriz de los coeficientes, el sistema anterior de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Teorema de Rouché-Fröbenius

2.1. Consecuencias del teorema

- Teorema de Rouché-Fröbenius

  Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible (tiene solución) si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, coincide con el rango de la matriz ampliada, A^*.

  Simbólicamente:

  $$\text{El sistema es compatible} \Leftrightarrow \text{rango}\ (A) = \text{rango}\ (A^*)$$

- Consecuencias del teorema de Rouché-Fröbenius:
  - Si rango $(A) \neq$ rango (A^*), entonces el sistema es incompatible.
  - Si rango $(A) =$ rango $(A^*) = r$, entonces el sistema es compatible.
    - — Si $r = n$, entonces el sistema es determinado.
    - — Si $r < n$, entonces el sistema es indeterminado.

2. Teorema de Rouché-Fröbenius

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales cuadrados

En los sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, es decir, sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas, se verifica:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rango }(A) = \text{rango }(A^*) = \text{número de incógnitas}$$

- Un sistema cuadrado es compatible determinado si $|A| \neq 0$.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

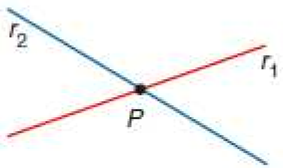
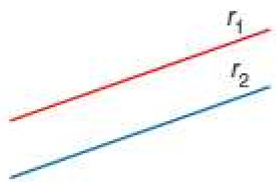
3. Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales

3.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Son sistemas de la forma:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La discusión de este tipo de sistemas, mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, nos conduce a la **interpretación geométrica** del mismo, es decir, al estudio de las **posiciones relativas de dos rectas** en el plano.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Rango A = Rango A^* = 2	Rango A = 1; Rango A^* = 2	Rango A = Rango A^* = 1
• Sistema compatible determinado; con una única solución. • Las rectas **se cortan** en el punto P solución del sistema. 	• Sistema incompatible; no tiene solución. • La rectas son **paralelas.** 	• Sistema compatible indeterminado; con infinitas soluciones. • Las rectas son **coincidentes.** 

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales

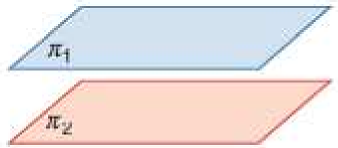
3.2. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1x + c_1x = d_1 \\ a_2x + b_2x + c_2x = d_2 \\ a_3x + b_3x + c_3x = d_3 \end{cases}$$

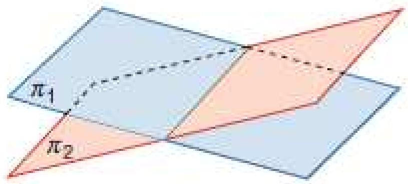
Planos coincidentes

La discusión de este tipo de sistemas, mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, nos conduce a la **interpretación geométrica** del mismo, es decir, al estudio de las **posiciones relativas de tres planos** en el espacio.



Planos paralelos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

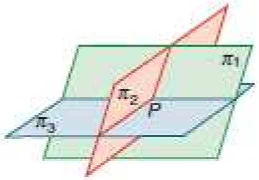
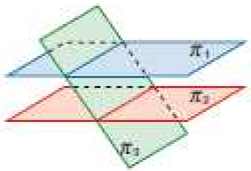
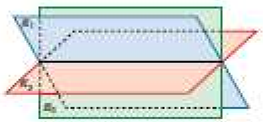
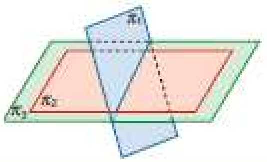
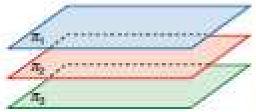
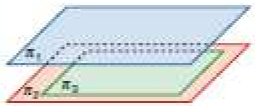


Planos secantes

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales

3.2. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Rg A = Rg A^* = 3	Rango A = 2; Rango A^* = 3	Rg A = Rg A^* = 2	Rango A = 1; Rango A^* = 2	Rg A = Rg A^* = 1
• Sistema compatible determinado. • Los planos se **cortan en un punto** P, que es la solución del sistema. 	• Sistema incompatible. • Los tres planos no tienen **nada en común.** Pueden cortarse dos a dos, o ser dos paralelos y el tercero cortar a ambos.  	• Sistema compatible indeterminado. • Los tres planos **se cortan en una recta.** Pueden ser los tres secantes, o dos coincidentes y el tercero secante con ellos.  	• Sistema incompatible. • Los tres planos son **paralelos.** Pueden ser los tres paralelos, o dos coincidentes y el tercero paralelo con ellos.  	• Sistema compatible indeterminado. • Los tres planos son **coincidentes.** 

3 Sistemas de ecuaciones lineales

4. Métodos de resolución de sistemas. Regla de Cramer

4.1. Método de Gauss

- El método de Gauss es una generalización del método de reducción y consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente.

  Para ello tomamos la matriz ampliada del sistema y mediante las operaciones elementales por filas la transformamos en una matriz escalonada en ceros, es decir, con ceros bajo la diagonal. De esta forma obtenemos un sistema equivalente al inicial, en el que se pueden dar tres casos:

  - Que el sistema sea incompatible, en cuyo caso no hay solución.
  - Que el sistema sea compatible y determinado, en cuyo caso se resuelve fácilmente por sustitución de forma escalonada.
  - Que el sistema sea compatible indeterminado, en cuyo caso nos quedarán menos ecuaciones que incógnitas. Para resolverlo lo convertimos en un sistema cuadrado pasando al segundo miembro las incógnitas necesarias.

4.2. Método de la matriz inversa

- Este método consiste en escribir el sistema en forma matricial

$$A \cdot X = B$$

y despejar la matriz X, siempre que exista A^{-1}:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

4.3. Regla de Cramer

$$\left.\begin{array}{r}\text{Un sistema}\\ \text{es de Cramer}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{núm. de ecuaciones} = \text{núm. de incógnitas}\\ \bullet\ |A| \neq 0\end{array}\right.$$

- **Regla de Cramer**

  El valor de cada incógnita es el cociente de dividir el determinante formado por la matriz de los coeficientes sustituyendo en ella la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita buscada por la columna de los términos independientes, por el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

La **expresión de un sistema homogéneo** de *m* ecuaciones con *n* incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Una de las características más relevantes de los sistemas homogéneos es que todos ellos son **compatibles**, es decir, siempre tienen solución, ya que la última columna de la matriz ampliada, *A**, tiene todos sus elementos nulos, lo cual deja invariable el rango de la matriz de los coeficientes y, por lo tanto, rango (*A*) = rango (*A**).

- Sea rango (A) = rango (A*) = r, y n el número de incógnitas del sistema.
  - — Si $r = n$, entonces el sistema es determinado (solución trivial).
  - — Si $r < n$, entonces el sistema es indeterminado (infinitas soluciones).

Las **matrices *input-output*** constituyen uno de los instrumentos más importantes en el análisis de procesos de entrada y salida para la actividad económica y, en particular, para el estudio de la estructura productiva y de las interrelaciones entre distintas industrias o sectores de la misma.

Sea a_{ij} la cantidad de salida de la industria j que necesita la industria i para producir una unidad de producto en un tiempo determinado (día, semana, mes, año…). La matriz de los coeficientes se llama **matriz de entrada-salida (*input-output*),** también llamada **matriz tecnológica.**

$$\begin{array}{cc} & \textit{Usuario (salida)} \\ & \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_2 \end{array} \\ \textit{Suministro (entrada)} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Wassily W. Leontief (1906-1999)

Este economista, nacido en San Petersburgo y afincado en Estados Unidos desde 1931, publicó su modelo con matrices *input-output* en 1936.

Matriz de entrada-salida *(input-output)*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz de demanda externa:

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Matriz de salidas *(outputs)*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- En todo problema de carácter algebraico debemos de tener en cuenta:
  - Los datos o valores conocidos.
  - Los valores desconocidos que deberemos obtener, llamados **incógnitas.**
  - Las relaciones entre datos e incógitas que dan lugar a **ecuaciones.**

En la resolución de todo problema de carácter algebraico conviene seguir los siguientes pasos o etapas: