SISTEMAS

ACTIVIDADES FINALES

1. Expresa los sistemas siguientes de todas las formas posibles, poniendo de manifiesto, en cada caso, las matrices de los coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Estudia la existencia de soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = 9 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 7x + 7y + z = -6 \end{cases}$

3. Estudia, según los valores del parámetro *a*, la naturaleza de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax - (3a - 2)y = 1 \\ x - ay = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 2a \\ x - ay = -3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax - y - z = -a \\ x - ay + az = a \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

4. Consideramos el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$.

a) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.

c) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible determinado.

5. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \\ -12x + 4y = 4 \end{cases}$

6. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro *a*:

a) $\begin{cases} 2x + (1 - a)y = 0 \\ x + 2y = -a \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = -4 \\ -3x + 6y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases}$

7. Resuelve los sistemas siguientes por el método de la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$

8. Comprueba que los siguientes sistemas son de Cramer y encuentra su solución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases}$

■ 9. Indica, razonadamente, si las parejas de sistemas que siguen son equivalentes:

a) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -y + z = 3 \\ x + 4y + 3z = -2 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ x + y - 4z = -3 \\ 2x + 3y - 5z = -5 \end{cases}$

■ 10. Averigua para qué valor del parámetro a los dos sistemas siguientes son equivalentes:

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

■ 11. Halla los valores de a, b y c para que los sistemas que siguen sean equivalentes:

$$\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - 4y = -1 \\ 2x - y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases}$$

■ 12. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los sistemas siguientes y encuentra sus soluciones en los casos que sean compatibles:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y - z = z \\ -x + ay + z = x \\ -3x + 3y + z = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

■ 13. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

■ 14. El dueño de un supermercado ha comprado embutidos, bebidas y conservas, por un importe total de 4600 €. El valor de las conservas es el mismo que el de las bebidas y embutidos juntos. Si vende todos estos productos, añadiendo un beneficio del 10 % en el embutido, el 20 % en las bebidas y el 15 % en las conservas, obtendrá un importe total de 5305 €. Calcula lo que pagó por cada uno de ellos.

■ 15. Tres empresas A, B y C se suministran entre sí los bienes que cada una necesita de las otras, y a su vez satisfacen la demanda exterior.

La empresa A suministra a la empresa B un 11 % del material que esta necesita para hacer una unidad de sus productos, a la empresa C un 3 % y a sí misma un 28 %, y tiene una demanda exterior de 1300 unidades. La empresa B suministra a las empresas A y C, respectivamente, un 11 % y un 9 % de sus necesidades, ella necesita un 39 % de lo que fabrica, y su demanda exterior es de 5000 unidades. La empresa C necesita un 15 % de su fabricación, suministra un 6 % de lo que necesita A y un 8 % de lo que necesita B, y su demanda exterior es de 4000 unidades.

Halla la matriz de salida, es decir, la cantidad que debe producir cada una de las empresas para satisfacer la demanda interior y exterior.

■ 16. Tres individuos, un agricultor *(A)*, un ganadero *(G)* y un pescador *(P)*, forman una sociedad de consumo, cuyos productos se intercambian entre ellos sin relación con otras personas. La matriz de entrada y salida correspondiente a esta economía es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & G & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál debe ser la relación de precios de sus respectivos productos?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

   a) Sabiendo que $A \cdot B + C = 3D$, plantea un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

   b) Estudia el sistema planteado en función del número de sus soluciones y calcula una de ellas, si es posible.

2. a) Determina, según los valores del parámetro a, los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 3y = -a \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

   b) Resuelve los casos compatibles.

3. Un bar recibe un pedido diario de refrescos y batidos, por el que paga 6 €, siendo el precio de cada refresco de 20 céntimos de euro y el de cada batido de m céntimos de euro. Si se intercambiasen los precios unitarios de refrescos y batidos, habría pagado 6 € y 50 céntimos.

   a) Plantea un sistema con dos ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de refrescos y el número de batidos adquiridos ese día.

   b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

   c) ¿Cuántos batidos habría comprado si cada batido costase 30 céntimos de euro?

4. La condición de equilibrio para el precio, en unidades monetarias, de tres productos P_1, P_2 y P_3, relacionados entre sí, da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales: $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x, y, z los precios de los productos P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

   Expresa el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$. Calcula la matriz inversa de A y determina los precios de equilibrio para estos tres productos P_1, P_2 y P_3.

5. En un crucero hay paquetes de tres tipos: individual (1 pasajero), pareja (2 pasajeros) y grupo familiar (4 pasajeros). La tarifa individual es de 800 €, la tarifa de pareja es de 1 200 € y la tarifa familiar es de 1 600 €. Para el próximo viaje hay 2 400 pasajeros que han pagado un total de 1 264 000 €. Si los pasajeros de individual son el 20 % de la suma de los de pareja y de grupo familiar, determina la distribución de los pasajeros de los tres tipos de tarifas.

6. Un camión trae, en su carga, cajas de tres productos A, B y C. Se ha perdido la hoja de carga, pero uno de los operarios recuerda que en total hay 120 cajas, que las de tipo A eran tantas como las de tipo B y C juntas y que las de tipo C eran la cuarta parte de las del tipo B.

   a) ¿Cuántas cajas de cada tipo trae el camión?

   b) Otro operario dice que del tipo A eran 12 más que del tipo B. Comprueba si esta información se contradice con la del primer operario.

7. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 €. Han recaudado, en total, 600 € y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 €. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

AUTOEVALUACIÓN

1. Sea el sistema $\begin{cases} ax - \dfrac{y}{a} = 1 \\ -ax + ay = 2 \end{cases}$, con $a \neq 0$. Para $a = 1$, el sistema es:

   a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Incompatible

2. Consideramos el sistema de ecuaciones en forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para $a = 1$, el sistema es:

   a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Incompatible

3. Las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.

   a) Se cortan en un punto b) Se cortan dos a dos c) Son paralelas

4. Sea el sistema $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y - 3z = 8 \\ x + y + 7z = 8 \end{cases}$. Si lo resolvemos por Gauss o Cramer, obtenemos:

   a) $x = 6, y = 2, z = 0$ b) $x = 2, y = 0, z = 6$ c) $x = 0, y = 2, z = 6$

5. En un hipermercado se realiza el recuento de caja al final de cierto día. En monedas de 10, 20 y 50 céntimos de euro, el importe total obtenido asciende a 500 €. Por otro lado, se sabe que 200 € corresponden, conjuntamente, a las monedas de 10 y 20 céntimos. Si en total se cuentan 1800 monedas, las monedas que debe haber de 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente, para que la caja cuadre son:

   a) 400, 600 y 800 b) 400, 800 y 600 c) 800, 600 y 400