GEOMETRÍA AFÍN

1. En R^3 consideramos los puntos P (3, - 1, 2) y Q (2, 0, 3).

a) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

b) Halla las coordenadas del punto R de modo que el vector $\overrightarrow{RS}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{PQ}$ siendo S (2, 4, 1).

c) Halla las coordenadas del punto A de modo que el vector $\overrightarrow{BA}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{QP}$ siendo B (0, 1, 3).

Las soluciones son:

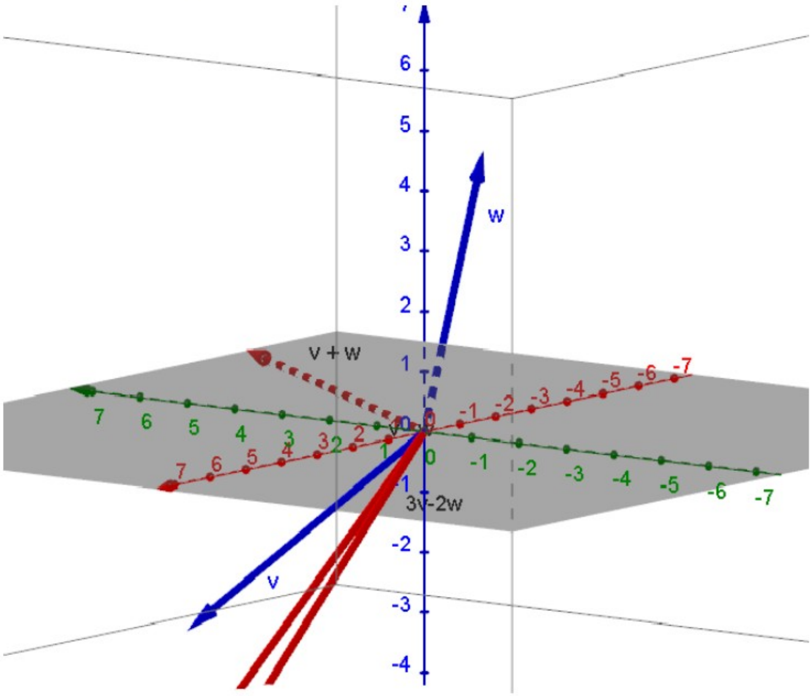
a) Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ = (- 1, 1, 1) y $\overrightarrow{QP}$ = (1, - 1,- 1).

b) El punto R (3, 3, 0).

c) El punto A (1, 0, 2)

2. Sean los vectores libres $\vec{v} = (4,\ 2, -\ 3)$ y $\vec{w} = (1, -\ 2,\ 5)$. Dibuja estos vectores y los vectores $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{v} - \vec{w}$. Halla las coordenadas del vector $3\vec{v} - 2\ \vec{w}$

Los dibujos de los vectores pedidos pueden verse en el gráfico:



Los vectores $\vec{v} = (4,\ 2, -\ 3)$ y $\vec{w} = (1, -\ 2,\ 5)$ están dibujados en color azul.

Los vectores $\vec{v} + \vec{w} = (5,\ 0,\ 2)$; $\vec{v} - \vec{w} = (3,\ 4, -\ 8)$ y $3\vec{v} - 2\ \vec{w}$ = (10, 10, -19) están dibujados en color rojo.

3. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2\ \vec{v} - \vec{w} = (4,\ 1,\ 3) \\ \vec{v} + 3\ \vec{w} = (2,\ 4,\ -2) \end{cases}$

La solución del sistema son los vectores $\vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w} = (0,\ 1,\ -1)$.

4. La base canónica de R³ esta formada por los vectores $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$. Comprueba que es una base y halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (8,\ -2,\ 5)$ respecto a esa base.

Es una base porque son vectores de R³ linealmente independientes.

Las coordenadas del vector dado respecto a esa base son 8, - 2 y 5, respectivamente.

5. ¿Los vectores $\vec{u} = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{v} = (2,\ 3,\ 5)$ y $\vec{w} = (1,\ 3,\ 2)$ forman base de R³? En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{r} = (4,\ 13,\ 5)$ respecto a ella.

Forman base porque son vectores de R³ linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Las coordenadas, x, y, z, del vector dado respecto a esta base vienen dadas por:

$(4,\ 13,\ 5)$ = x · $(1,2,1)$ + y · $(2,3,5)$ + z · $(1,3,2)$ y son (2, -1, 4).

6. ¿Para qué valores de b los vectores $\vec{u} = (2,b,1)$, $\vec{v} = (3,2,b)$ y $\vec{w} = (1,-1,2)$ forman base de R³?

Para que formen base se debe cumplir que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & b \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = b^2 - 4b + 3 \neq 0$; es decir forman base para todos los valores de b excepto b = 3 y b = 1.

7. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, - 1, 3) y uno de sus vectores directores es $\vec{u} = (-1, 2,\ 4)$.

Las ecuaciones de la recta son:

Vectorial: (x, y, z) = (2, - 1, 3) + t · (- 1, 2, 4).

Paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Continua: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{4}$ General: $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$

8. Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos P (1, 2, 3) y Q (2, - 3, 2). Halla un punto alineado con P y Q.

Las ecuaciones de la recta son:

Paramétricas: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \\ z=3-t \end{cases}$ Continua: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-1}$

Otro punto alineado con P y Q es, por ejemplo, A (3, - 8, 1).

9. Escribe, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de la recta dada por: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=z$

Las ecuaciones de la recta son:

Vectorial: (x, y, z) = (0, - 2, 0) + t · (2, - 3, 1)

Paramétricas: $\begin{cases} x=2t \\ y=-2-3t \\ z=t \end{cases}$

General: $\begin{cases} x-2z=0 \\ y+3z-2=0 \end{cases}$

10. Dada la recta r como intersección de dos planos $r\equiv\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$ **, halla dos puntos de esta recta y uno de sus vectores directores.**

Los puntos pueden ser P (0, 7, 11) y Q (1, 4, 6) y un vector (1, - 3, - 5).

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta:

$$r\equiv\begin{cases} x=2t \\ y=-3+2t \\ z=4-t \end{cases}.$$

La ecuación continua es $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ y la general $\begin{cases} x-y=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$.

12. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P (2, - 3, 5) y es paralela al eje OZ.

Una ecuación general es $\begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 115

13. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación del plano en cada uno de los siguientes apartados:

a) Que pasa por el punto A (2, - 1, 3) y dos de sus vectores directores son $\vec{v}=(-1,2,4)$ **y** $\vec{w}=(2,0,-1)$.

b) Que pasa por los puntos P (2, - 1, 1), Q (2, 3, 0) y R (1, – 2, - 1).

c) Que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $\frac{x-1}{2}=y+1=-z$.

d) Que pasa por el punto A (2, - 3, 5) y es paralelo al plano de ecuación 3x – y + z – 6 = 0.

a) La ecuación del plano es $2x - 7y + 4z - 23 = 0$.

b) La ecuación del plano es $9x - y - 4z - 15 = 0$.

c) La ecuación del plano es $x + y + 3z = 0$.

d) La ecuación del plano es $3x + y + z - 14 = 0$.

14. Halla las ecuaciones de los ejes y de los planos coordenados.

Eje OX $\equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; eje OY $\equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ y eje OZ $\equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Las ecuaciones de los planos son: OXY $\equiv z=0$, OXZ $\equiv y=0$ y OYZ $\equiv x=0$.

15. Halla la ecuación general del plano de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=3-t+2s \\ y=1+t-2s \\ z=2-s \end{cases}$

La ecuación del plano es $x + y - 4 = 0$.

16. a) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos P (2, - 6, 1), Q (- 1, 3, 2) y es paralelo al eje OX.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \quad \textbf{y} \quad s\equiv\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+4t \\ z=3+6t \end{cases}$$

Las soluciones son:

a) La ecuación del plano es $y - 9z + 15 = 0$.

b) Las rectas dadas son paralelas. Por tanto hallamos la ecuación del plano tomando un punto de una de ellas, un vector de una de ellas y el vector entre un punto de una de ellas y un punto de la otra.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 0$$, es decir $17x - 7y - z - 38 = 0$.

17. Estudia las posiciones relativas de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ 5x+y+4z=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ y-2z=1 \\ 2x+5y+4z=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+z=1 \\ 2x+y-2z=10 \\ x-2y-z=-5 \end{cases}$

Las soluciones son:

a) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4y+z=5 \end{cases}$.

b) Los planos se cortan dos a dos en sendas rectas.

c) Los planos se cortan en el punto de coordenadas (1, 4, -2).

18. Determina, en cada apartado, la posición relativa de la recta y el plano dados:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t+1 \\ z = t \end{cases}$ $\pi \equiv 3x + 2y - 11z - 5 = 0$

b) $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{2}$ $\pi \equiv 2x - y - 4z = 0$

Las soluciones son:

a) Son secantes. Se cortan en el punto de coordenadas (6, 10, 3).

b) La recta es paralela al plano.

19. Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \quad \textbf{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+3t \\ z = -4+5t \end{cases}$$

Para a = 1 son secantes. Para a $\neq 1$ se cruzan en el espacio.

20. ¿Para que valor de m los siguientes planos se cortan dando una recta?:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z = 3 \ ; \ \pi_2 \equiv x - y + z = 2 \ ; \ \pi_3 \equiv 3x - y - mz = 4 \ ?$$

En este caso halla la ecuación de la recta.

Para m = - 1 se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$.

Para m $\neq$ -1 se cortan dando un punto.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 116

1. Halla la ecuación de la recta paralela a los planos $\pi_1 \equiv 3x + 2y - z = 2$; $\pi_2 \equiv 2x - z = 4$ **y que pase por el punto P (0, 2, -1).**

La ecuación es $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$.

2. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0 \\ 2y = 3 - z \end{cases}$ **y es paralelo a la recta** $s \equiv \begin{cases} x - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$.

Hallamos la ecuación del plano tomando un punto de la recta, uno de sus vectores directores y un vector director de la paralela. Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$, es decir 12x + 7y – z – 30 = 0

3. Se consideran las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = m - z$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

a) Discute en función de *m* la posición relativa de las rectas.

b) Para m = 14 halla la ecuación del plano que las contiene.

Las respuestas son:

a) Para m = 14 son secantes. Para m $\neq$ 14 se cruzan.

b) Para m = 14 son secantes y el plano que las contiene es $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, es decir,

2x - 5y – z + 12 = 0.

4. Encuentra la ecuación de la recta contenida en el plano x – y = 0 y en el plano paralelo a 2x- 3y + z = 4 y que pase por el punto P (1, 1, 3).

La recta tendrá por ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

5. Tres vértices de un paralelogramo ABCD son los puntos A (1, 1, 6), B (2, 3, 7) y C (0, - 6, 0). Halla las coordenadas del cuarto vértice y la ecuación del plano que contiene a este paralelogramo.

Lo podemos hacer mediante vectores, ya que el vector $\overrightarrow{AD}$ es equipolente al $\overrightarrow{BC}$ de donde obtenemos que el punto D tiene de coordenadas (- 1, - 8, - 1). También podemos resolverlo sabiendo que el punto medio del segmento AC es el mismo que el de BD.

La ecuación del plano que contiene al paralelogramo es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-6 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + z - 6 = 0.$$

6. Discute, según los valores de *a*, la posición relativa de los planos $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \\ x + 3y + (1-a)z = 0 \\ 3x - ay + 2z = a - 1 \end{cases}$ **.**

Para a = 2 los planos se cortan dando una recta. Para a = 5 los tres planos no tienen nada en común, se cortan dos a dos en sendas rectas. Para a $\neq$ 2 y a $\neq$ 5 los planos son secantes, se cortan en un punto.

7. ¿Existen valores de a y b para los cuales los planos $\pi_1 \equiv ax - 2y + bz = 4$ **;** $\pi_2 \equiv 2x + 4y + az = -2$ **son paralelos?**

Se tienen que verificar las igualdades $\frac{a}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{b}{a}$. Obtenemos a = - 1 y b = 0,5.

8. Dos rectas en el espacio que sean coplanarias ¿qué posiciones pueden tener? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

Pueden ser paralelas, secantes o coincidentes.

9. Sea el tetraedro de vértices A (1, 2, 0), B (2, 6, 0), C (5, 3, 0) y D (3, 4, 3).

a) ¿Los puntos medios de las aristas AB, BD, CD y CA están en el mismo plano? En caso afirmativo halla su ecuación.

b) El plano anterior ¿cómo es respecto a la recta que contiene a la arista AD?

a) Si están en el mismo plano. Este tiene por ecuación 6x + 6y – 8z – 33 = 0.

b) La recta que contiene a la arista AD tiene por ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ y esta recta es paralela al plano anterior.

10. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $\begin{cases} y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ y que pase por el punto de intersección de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = -y = \dfrac{z+1}{2}$ con el plano x + z = 7 + y.

El punto de intersección de la recta r con el plano dado tiene de coordenadas (5, - 1, 1).

La recta pedida es $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 - 3t. \\ z = 1 + t \end{cases}$

11. ¿Para qué valores de a y b el plano $\pi \equiv$ 3x – y + az = b contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$?

Para que el plano contenga a la recta debe contener todos sus puntos. Hallamos dos puntos de la recta. Por ejemplo, P (1, 0, 3) y Q (1, 1, 4). Obligando al plano a que pase por ellos obtenemos: a = 1 y b = 4.

12. Sea el cuadrado de centro en el punto C (1, 1, - 1) y tiene uno de sus lados en la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que contenga a este cuadrado.

El plano contendrá al punto y a la recta dados y tendrá por ecuación: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, es decir, 2x - 2y – z - 1 = 0.