Producto Escalar

- El **producto escalar** de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define de la siguiente forma:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$$

Las propiedades más importantes del producto escalar son:

1. El producto escalar de un vector por sí mismo coincide con el cuadrado de su módulo, lo que hace que este producto sea un número no negativo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \geq 0$$

2. El producto escalar es conmutativo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

3. El producto escalar es distributivo respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

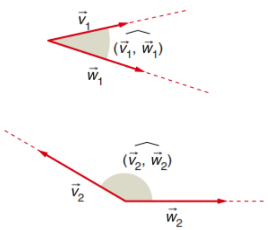
4. El producto escalar cumple la siguiente relación relativa al producto de un número real por un vector:

$$(t\,\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (t\,\vec{w}) = t\,(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

5. El producto escalar de un vector por sí mismo es nulo únicamente en el caso en el que el vector es el vector nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

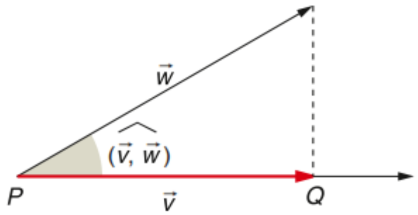
Se define al ángulo que forman dos vectores libres como el menor de los ángulos que forman las semirrectas que contienen a dos de sus representantes concurrentes.



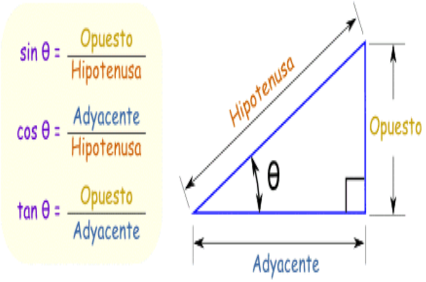
$$0° \leq \left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) \leq 180°$$

Interpretación geométrica del producto escalar

Proyección de un vector sobre otro



proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$ = $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{w})$



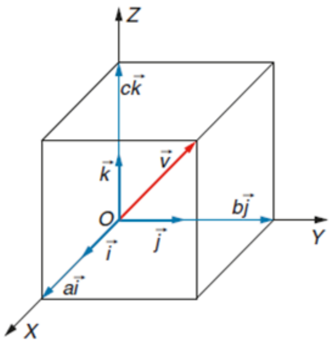
$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{w}) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |\vec{w}|\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) = |\vec{v}|\,\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{w})$$

Expresión analítica del producto escalar

Sistema de referencia ortonormal

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$



Expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \cdot (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Aplicaciones del producto escalar

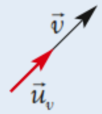
Módulo de un vector libre. Vector unitario

Dado el vector $\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, teniendo en cuenta la primera propiedad del producto escalar y la expresión analítica del mismo, obtenemos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

El vector unitario y del mismo sentido que un vector $\vec{v} = (a, b, c)$ es el vector:

$$\vec{u}_v = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

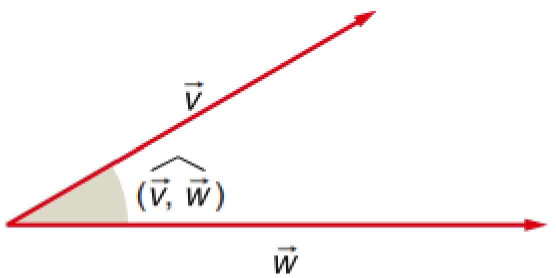


Fácilmente comprobamos que $|\vec{u}_v| = 1$ y que tiene el mismo sentido que $\vec{v}$, puesto que proviene del producto de un número real positivo $\left(1 / \sqrt{a_2 + b_2 + c_2}\right)$ por el vector $\vec{v}$.

Ángulo de dos vectores

A partir de la definición de producto escalar y de su expresión analítica, obtenemos el ángulo que forman dos vectores, $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Vectores perpendiculares u ortogonales

A partir de la definición de producto escalar, deducimos que dos vectores no nulos son perpendiculares si se cumple la siguiente condición:

- La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean **perpendiculares u ortogonales** es que su producto escalar sea cero. Simbólicamente:

$$\vec{v} \neq \vec{0}; \quad \vec{w} \neq \vec{0}; \quad \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Vector normal a un plano

Dado el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ y los puntos coplanarios con π, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P(x_1, y_1, z_1)$, se verifica:

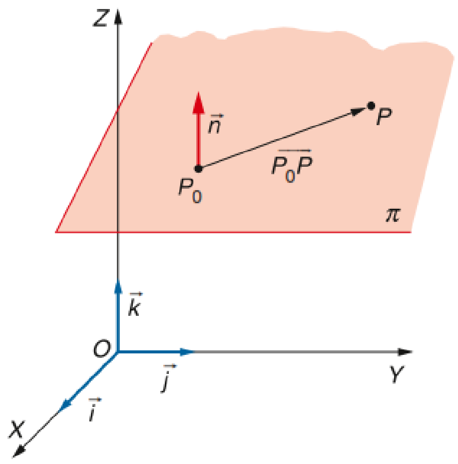
$$P_0 \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \quad P \in \pi \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Y restando las ecuaciones obtenemos:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \Leftrightarrow (A, B, C) \perp \overrightarrow{P_0P}$$

con lo que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es perpendicular al plano.

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{vector normal} = \vec{n} = (A, B, C)$$



Ángulos y distancias entre elementos del espacio

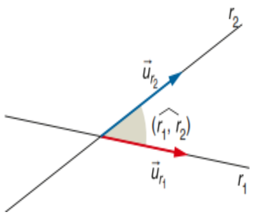
A partir de la definición de producto escalar de vectores llegamos al ángulo que forman dos vectores $\vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (d,e,f)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \text{ con } 0^\circ \le \alpha \le 180^\circ . \text{ Analíticamente } \cos(\alpha) = \frac{|ae+bf+cg|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$$

Y a partir del ángulo que forman dos vectores veremos los ángulos que forman dos rectas, dos planos y una recta y un plano.

Ángulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas r_1 y r_2 de vectores directores $\vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (d,e,f)$ respectivamente ,el ángulo entre r y s es el menor ángulo que forman sus vectores directores, por lo tanto : $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ con $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

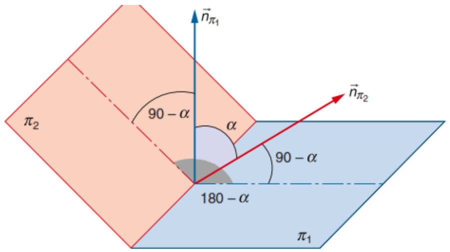


Y se deducen las siguientes condiciones de perpendicularidad y paralelismo:

- $r_1 \perp r_2 \iff \vec{u}_{r_1} \perp \vec{u}_{r_2} \iff \vec{u}_{r_1} \cdot \vec{u}_{r_2} = 0$
- $r_1 \parallel r_2 \iff \vec{u}_{r_1} \parallel \vec{u}_{r_2} \iff \vec{u}_{r_1} = t \cdot \vec{u}_{r_2}; \quad t \in \mathbb{R}$

Ángulo entre dos planos:

Dados dos planos π_1 y π_2 de vectores normales $\vec{n} = (A_1,B_1,C_1)$ y $\vec{m} = (A_2,B_2,C_2)$ respectivamente ,el ángulo entre π_1 y π_2 es el menor ángulo que forman sus vectores normales, por lo tanto :



$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|} \text{ con } 0^\circ \le \alpha \le 90^\circ.$$

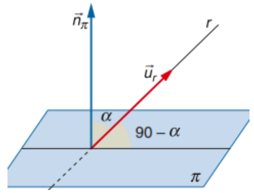
Y las condiciones de perpendicularidad y paralelismo son:

- $\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \iff \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$
- $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \iff \vec{n}_{\pi_1} = t \cdot \vec{n}_{\pi_2}; \quad t \in \mathbb{R}$

Ángulo entre recta y plano:

Sea r la recta de vector director $\vec{u}_r$, y π el plano de vector normal $\vec{n}_\pi$. Llamamos α al ángulo que forman estos vectores, con lo que el ángulo que forman la recta y el plano es $90 - \alpha$, como podemos ver en el dibujo. Con esto obtenemos:

$$\text{sen}(\widehat{r,\pi}) = \text{sen}(90-\alpha) = \cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r, \vec{n}_\pi})$$



Por tanto: $\text{sen}(r,\pi) = |\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ con $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

Y las condiciones de perpendicularidad y paralelismo son:

- $r \perp \pi \iff \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi \iff \vec{u}_r = t \cdot \vec{n}_\pi; \quad t \in \mathbb{R}$
- $r \parallel \pi \iff \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

Distancia entre dos puntos:

Como ya sabemos, la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

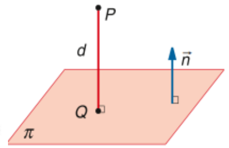
$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia de un punto a un plano:

La distancia del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano π de ecuación:

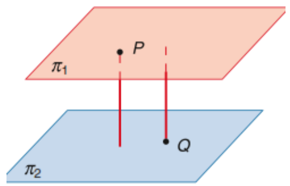
$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

es la distancia entre P y el punto Q, proyección de P sobre el plano.



$$d(P,\pi) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \qquad d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Y por tanto dados dos planos paralelos se tiene que : $d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = d(Q,\pi_1)$ siendo P un pnt o de π_1 y Q de π_2.



EJERCICIOS:

1. Dados los vectores $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = -8\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, calcula:

a) Los productos escalares $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

b) Los módulos $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $|\vec{w}|$.

a) Utilizando la expresión analítica del producto escalar, obtenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\cdot(-8) + 3\cdot 6 + (-2)\cdot 2 = -18$$
$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 4\cdot 2 + 3\cdot(-3) + (-2)\cdot 4 = -9$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (-8)\cdot 2 + 6\cdot(-3) + 2\cdot 4 = -26$$

b) Los módulos de los vectores son:

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 10{,}2$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 5, 0)$, $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$, calcula los ángulos que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Con la expresión que proporciona el ángulo de dos vectores a través del coseno, obtenemos:

- $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \dfrac{5}{\sqrt{26}\sqrt{2}} = \dfrac{5}{7{,}21} = 0{,}69;$ luego $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 46°\ 6'\ 7{,}6''$.
- $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \dfrac{-2}{5{,}1} = -0{,}39;$ luego $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = 113°\ 5'\ 36''$.

3. Convierte el vector $\vec{v} = (3, 0, 4)$ en un vector unitario y proporcional al dado.

Para conseguir el vector buscado, basta multiplicar el vector $\vec{v}$ por el inverso de su módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$$

Obtenemos el vector: $\vec{v}\,' = \left(\dfrac{1}{|\vec{v}|}\right)\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{5}(3,\ 0,\ 4) = \left(\dfrac{3}{5},\ 0,\ \dfrac{4}{5}\right)$

Comprobamos que $\vec{v}\,'$ es unitario al cumplir: $|\vec{v}\,'| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{25}} = 1$

4. Sean los vectores $\vec{u} = (x, 3, 6)$ y $\vec{v} = (3, y, 4)$. Calcula x e y de manera que ambos sean perpendiculares y $|\vec{v}| = 13$.

Las condiciones $\vec{u}\perp\vec{v}$, es decir, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ y $|\vec{v}| = 13$, se traducen en el sistema de ecuaciones:

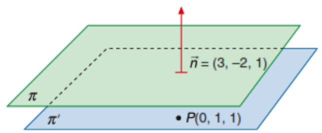
$$\begin{cases} 3x + 3y + 24 = 0 \\ \sqrt{3^2 + y^2 + 4^2} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 12 \end{cases}$$

5. Dado el punto $P(0, 1, 1)$, el plano $\pi: 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$, halla:

a) Ecuación del plano paralelo a π y que pase por P.

b) Ecuación del plano perpendicular a r y que pase por P.

a)



El plano π' buscado pasa por P y tiene el mismo vector normal que π:

$$\vec{n}\perp\pi' \Rightarrow \pi': 3x - 2y + z + D = 0$$
$$P\in\pi' \Rightarrow 3\cdot 0 - 2\cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

por lo que el plano π' tiene de ecuación: $3x - 2y + z + 1 = 0$

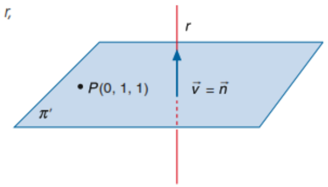
b) El plano π' perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de r, por lo que:

$$\pi': x - y + 3z + D = 0$$

Como $P\in\pi' \Rightarrow 0 - 1 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -2$

luego el plano π' tiene de ecuación:

$$x - y + 3z - 2 = 0$$



6. Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{3} \qquad r_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

El ángulo que forman las rectas r_1 y r_2 coincide con el ángulo que forman sus respectivos vectores direccionales $\vec{u}_{r_1} = (-1, 1, 3)$ y $\vec{u}_{r_2} = (-1, -1, 0)$.

A partir de la expresión del coseno obtenemos:

$$\cos(\widehat{r_1, r_2}) = \cos(\widehat{\vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}}) = \frac{|\vec{u}_{r_1}\cdot\vec{u}_{r_2}|}{|\vec{u}_{r_1}|\cdot|\vec{u}_{r_2}|} = \frac{1 + (-1) + 0}{\sqrt{11}\sqrt{2}} = 0$$

luego el ángulo que forman las dos rectas es: $(\widehat{r_1, r_2}) = 90°$.

En este caso, las rectas son perpendiculares.

7. Calcula el ángulo formado por los planos:

$$\pi_1: x + y - 3z = 1 \qquad \pi_2: 2x - 3y + 2z = 2$$

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 se obtiene a partir del ángulo que forman sus respectivos vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, -3)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (2, -3, 2)$.

Utilizando la expresión del coseno como aplicación del producto escalar, obtenemos:

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = -\cos(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}}) = -\frac{\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}|\cdot|\vec{n}_{\pi_2}|} = -\frac{2 + (-3) + (-6)}{\sqrt{11}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{187}}$$

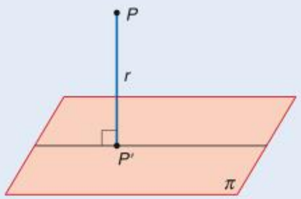
luego el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 es $59°\ 12'\ 36{,}5''$.

Proyecciones

Proyección de un punto sobre un plano

Cuando se proyecta perpendicularmente un punto sobre un plano se obtiene un punto del plano que resulta de la intersección de dicho plano con la recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado.

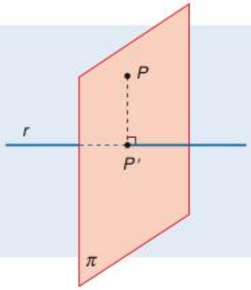
- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π.
  - Hallamos la intersección de r con π y obtenemos el punto proyección P'.



Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto sobre una recta es el punto intersección de esa recta con el plano perpendicular a ella y que contiene el punto.

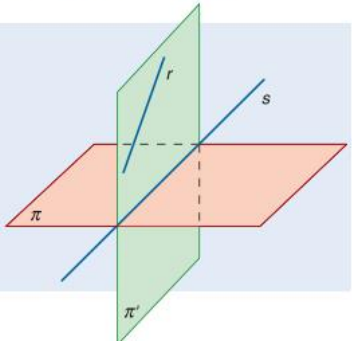
- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el plano π perpendicular a r y que contiene al punto P.
  - Hallamos la intersección del plano π con r y obtenemos el punto proyección P'.



Proyección de una recta sobre un plano

La proyección de una recta sobre un plano es la intersección (una recta) de dicho plano con el plano perpendicular a él y que contiene a la recta.

- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
  - La recta proyección s de r sobre π viene dada como intersección de los planos π y π'.

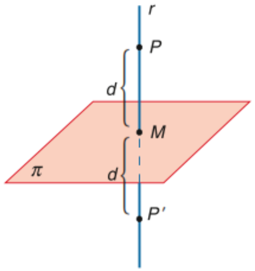


Elementos simétricos

Simétrico de un punto respecto de un plano

El simétrico de un punto P respecto de un plano π es el punto P' que se encuentra en la perpendicular trazada desde P al plano, de modo que P y P' equidistan del plano.

- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el punto M proyección del punto P sobre el plano π.
  - Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento PP'.

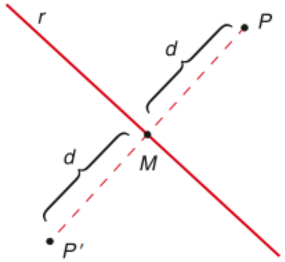


P y *P'* son simétricos respecto de π.

Simétrico de un punto respecto de una recta

El simétrico de un punto P respecto de una recta r es el punto P' que se encuentra en la perpendicular trazada desde P a la recta, de modo que P y P' equidistan de la recta.

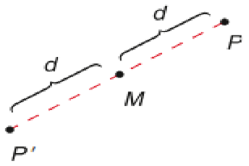
- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el punto M proyección del punto P sobre la recta r.
  - Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento PP'.



P y *P'* son simétricos respecto de *r*.

Simétrico de un punto respecto de otro punto

Este es el caso más sencillo de simetría. El simétrico de un punto P respecto de otro punto M es el punto P', y se determinará teniendo en cuenta que M es el punto medio de segmento PP'.



P y *P'* son simétricos respecto de *M*.

Recta que se apoya en dos y pasa por un punto

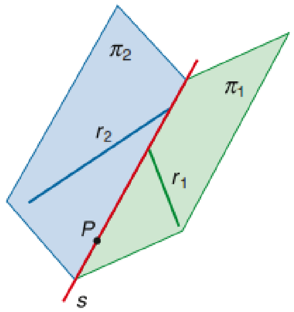
La recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 dadas y que pasa por un punto P dado es la recta que corta a ambas y pasa por P.

- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a P.
  - Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a P.
  - La recta s buscada es la intersección de π_1 y π_2.

Recta que se apoya en dos y es paralela a una dada

La recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 dadas y que es paralela a una recta r dada es la recta que corta a ambas y es paralela a r.

- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a $\vec{v}_r$.
  - Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a $\vec{v}_r$.
  - La recta s buscada es la intersección de π_1 y π_2.



↑ La recta s se apoya en r_1 y en r_2 y pasa por el punto P.

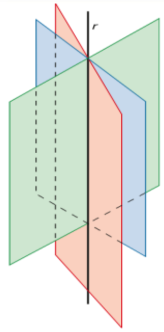
Haz de planos

Sea la recta r de ecuaciones implícitas:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

El conjunto de planos que contienen la recta r se llama **haz de planos,** y cualquier plano del haz tiene por ecuación:

$$t\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$$



EJERCICIOS

8. Halla la proyección del punto $P(1, 1, -2)$ sobre el plano $\pi: x + 2y + 3z = 11$.

- Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$$

- Intersecamos la recta r con el plano π y obtenemos el punto proyección P':

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -2+3t \end{cases} \\ \pi: x+2y+3z-11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} (1+t)+2(1+2t)+3(-2+3t)-11=0 \\ t=1 \\ P'(1+t,\ 1+2t,\ -2+3t) \Rightarrow P'(2, 3, 1) \end{array}$$

9. Calcula la proyección del punto $P(2, 0, -3)$ sobre la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$.

- Hallamos el plano π perpendicular a r y que contiene a P:

$$\pi \perp r \Rightarrow \pi: 2x + y - 2z + D = 0$$

$$P(2, 0, -3) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot 2 + 0 - 2\,(-3) + D = 0 \Rightarrow D = -10$$

luego el plano π es:

$$\pi: 2x + y - 2z - 10 = 0$$

- Hallamos la intersección de π con r y obtenemos el punto proyección, P':

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -2t \end{cases} \\ \pi: 2x+y-2z-10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 2(1+2t)+(-1+t)-2(-2t)-10=0 \\ t=1 \\ P'(1+2t,\ -1+t,\ -2t) \Rightarrow P'(3, 0, -2) \end{array}$$

10. Halla la ecuación de la recta proyección de la recta $r: \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -y+3z=-4 \end{cases}$ sobre el plano $\pi: 2x - y + 3z + 5 = 0$.

- Hallamos el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Todos los planos que contienen a r son los del haz de planos:

$$t(2x - 3y + z - 1) + s(-y + 3z + 4) = 0 \Rightarrow (2t)\,x + (-3t - s)\,y + (t + 3s)\,z + (-t + 4s) = 0$$

Como $\pi' \perp \pi \Rightarrow (2t, -3t - s, t + 3s) \cdot (2, -1, 3) = 0 \Rightarrow 4t + 3t + s + 3t + 9s = 0$

$$10t + 10s = 0 \Rightarrow t = -s$$

Luego el plano π' es:

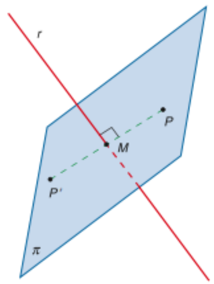
$$\pi': -2sx + 2sy + 2sz + 5s = 0 \Rightarrow \pi': 2x - 2y - 2z - 5 = 0$$

- La recta s proyección de r sobre π es:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

11. Halla el simétrico del punto de $P(5, 1, 0)$ respecto de la recta $r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = -t \end{cases}$

Seguimos el procedimiento analítico anterior:



- Hallamos el punto M proyección del punto P sobre la recta r. Para ello:
  - — Determinamos el plano π perpendicular a r y que pasa por P:

$$\pi \perp r \Rightarrow \pi: 2x + 3y - z + D = 0$$

$$P \in \pi \Rightarrow 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -13$$

Luego el plano π es: $2x + 3y - z - 13 = 0$.

  - — Hallamos la intersección de π con r y obtenemos:

$$\pi \cap r = M(3, 2, -1)$$

- Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento PP':

$$\frac{5+x}{2} = 3; \quad \frac{1+y}{2} = 2; \quad \frac{0+z}{2} = -1 \Rightarrow P'(1, 3, -2)$$

12. Determina la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$$r_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad r_2: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

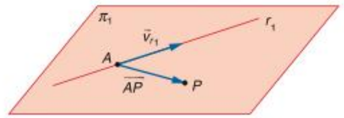
y que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$.

Seguimos el procedimiento analítico anterior:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a P.

Este plano contiene todos los puntos de r_1, en particular $A(1, 0, -1)$ y $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, 3)$, y el vector $\overrightarrow{AP} = (0, -1, 3)$.

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1: 3x + 3y + z - 2 = 0$$



- Hallamos el plano π_2 de forma análoga a π_1.

Este plano contiene a r_2 y a P. En particular contiene al punto $B(0, 2, 2)$, a $\vec{v}_{r_2} = (2, -1, 3)$ y a $\overrightarrow{BP} = (1, -3, 0)$. Por tanto:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2: 9x + 3y - 5z + 4 = 0$$

- La recta buscada tiene la ecuación $s: \begin{cases} 3x + 3y + z - 2 = 0 \\ 9x + 3y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$

13. Calcula la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ al plano $\pi: 3x + 4y - 6 = 0$.

Utilizando la expresión analítica, se obtiene: $d(P, \pi) = \dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$

Otro procedimiento que conduce al mismo resultado es calcular el punto Q, proyección del punto P sobre el plano π, y entonces la distancia buscada es la distancia entre P y Q. Las coordenadas del punto Q son $(2/5, 6/5, 3)$, y se tiene que:

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{(1 - 2/5)^2 + (2 - 6/5)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = 1$$

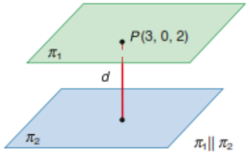
14. Calcula la distancia entre los planos π_1: $2x - 3y + z - 8 = 0$ y π_2: $2x - 3y + z + 12 = 0$.

El punto $P(3, 0, 2)$ pertenece al plano π_1, ya que se cumple $2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 2 - 8 = 0$.

Calculamos la distancia entre los planos paralelos π_1 y π_2 como la distancia entre el punto P y el plano π_2.

Obtenemos:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 2 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$



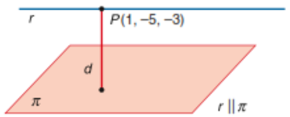
15. Calcula la distancia entre la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2}$ y el plano π: $x + 2y + 4z - 13 = 0$.

La recta r y el plano π son paralelos, ya que sus vectores direccional y normal son perpendiculares, al cumplirse $(2, -5, 2) \cdot (1, 2, 4) = 0$, ya que $2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 0$.

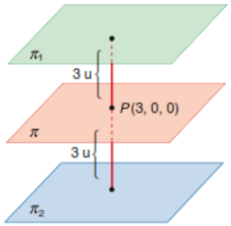
La distancia entre r y π es la distancia entre el punto $P(1, -5, -3)$ de la recta r y el plano.

Obtenemos:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 + 2(-5) + 4(-3) - 13|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{34}{\sqrt{21}}$$



16. Halla la ecuación del plano paralelo al plano $4x + 7y - 4z - 12 = 0$ y que diste de él 3 unidades.



Todos los planos paralelos al dado los podemos escribir como:

$$4x + 7y - 4z + D = 0$$

Tomamos un punto $P \in \pi$, por ejemplo, $P(3, 0, 0)$, y obligamos a que diste de los planos buscados 3 unidades:

$$d(P, \pi_1 \text{ o } \pi_2) = 3 = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + D|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} \Rightarrow \frac{|12 + D|}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 15 \\ D_2 = -39 \end{cases}$$

Existen dos planos que verifican el enunciado y son:

$$\pi_1: 4x + 7y - 4z + 15 = 0 \qquad \pi_2: 4x + 7y - 4z - 39 = 0$$

Calcula la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ al plano $\pi: 3x + 4y - 6 = 0$.

Utilizando la expresión analítica, se obtiene: $d(P,\pi) = \dfrac{|3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$

Otro procedimiento que conduce al mismo resultado es calcular el punto Q, proyección del punto P sobre el plano π, y e
la distancia buscada es la distancia entre P y Q. Las coordenadas del punto Q son $(2/5, 6/5, 3)$, y se tiene que:

$$d(P,\pi) = d(P,Q) = \sqrt{(1-2/5)^2 + (2-6/5)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = 1$$

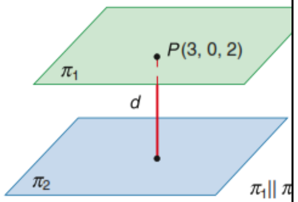
Calcula la distancia entre los planos $\pi_1: 2x - 3y + z - 8 = 0$ y $\pi_2: 2x - 3y + z + 12 = 0$.

El punto $P(3, 0, 2)$ pertenece al plano π_1, ya que se cumple $2\cdot 3 - 3\cdot 0 + 2 - 8 = 0$.

Calculamos la distancia entre los planos paralelos π_1 y π_2 como la distancia entre el punto P y el plano π_2.

Obtenemos:

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = \frac{|2\cdot 3 - 3\cdot 0 + 2 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$



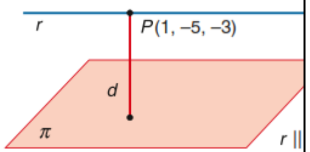
Calcula la distancia entre la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{2}$ y el plano $\pi: x + 2y + 4z - 13 = 0$.

La recta r y el plano π son paralelos, ya que sus vectores direccional y normal son perpendiculares, al cumplirse $(2, -5, 2)\cdot(1, 2$
ya que $2\cdot 1 - 5\cdot 2 + 2\cdot 4 = 0$.

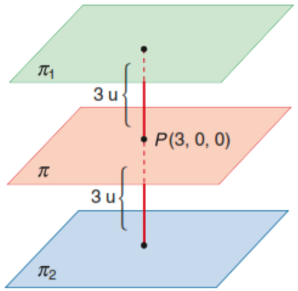
La distancia entre r y π es la distancia entre el punto $P(1, -5, -3)$ de la recta r y el plano.

Obtenemos:

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|1 + 2(-5) + 4(-3) - 13|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{34}{\sqrt{21}}$$



Halla la ecuación del plano paralelo al plano $4x + 7y - 4z - 12 = 0$ y que diste de él 3 unidades.



Todos los planos paralelos al dado los podemos escribir como:

$$4x + 7y - 4z + D = 0$$

Tomamos un punto $P \in \pi$, por ejemplo, $P(3, 0, 0)$, y obligamos a que diste de los p
buscados 3 unidades:

$$d(P,\pi_1 \text{ o } \pi_2) = 3 = \frac{|4\cdot 3 + 7\cdot 0 - 4\cdot 0 + D|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} \Rightarrow \frac{|12 + D|}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 15 \\ D_2 = -39 \end{cases}$$

Existen dos planos que verifican el enunciado y son:

$$\pi_1: 4x + 7y - 4z + 15 = 0 \qquad \pi_2: 4x + 7y - 4z - 39 = 0$$