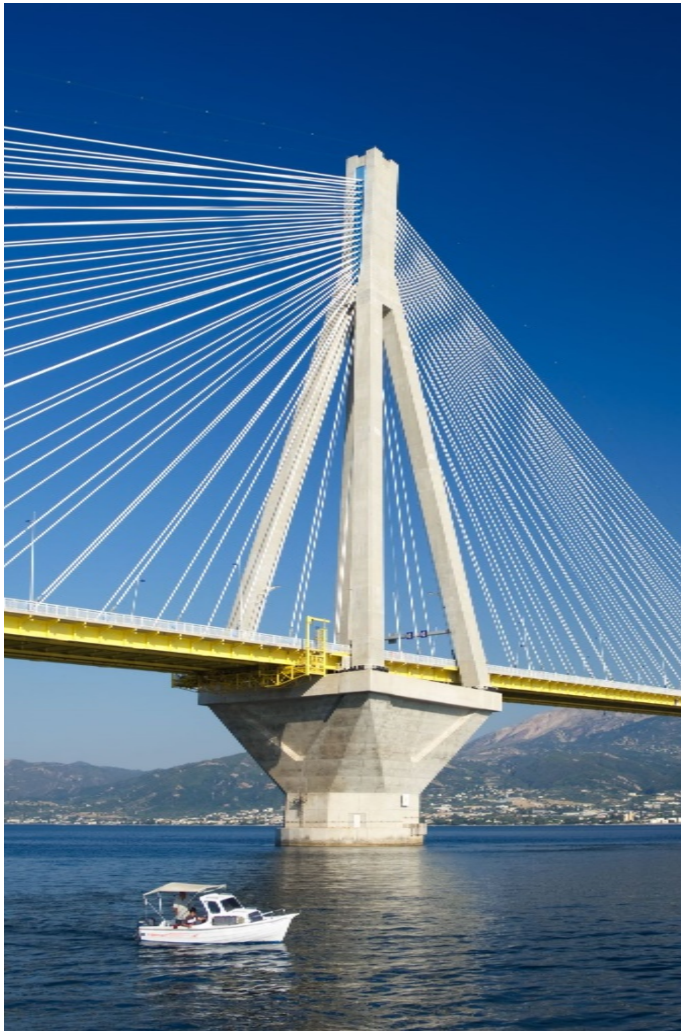
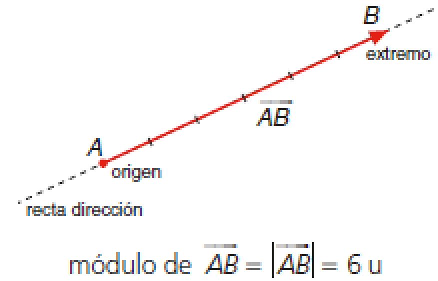
4 Geometría afín en el espacio

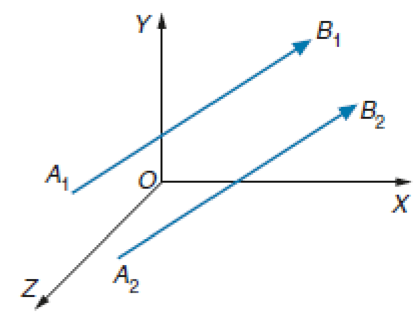


- **Vector fijo.** Un vector fijo de origen *A* y extremo *B* es un segmento orientado caracterizado por:

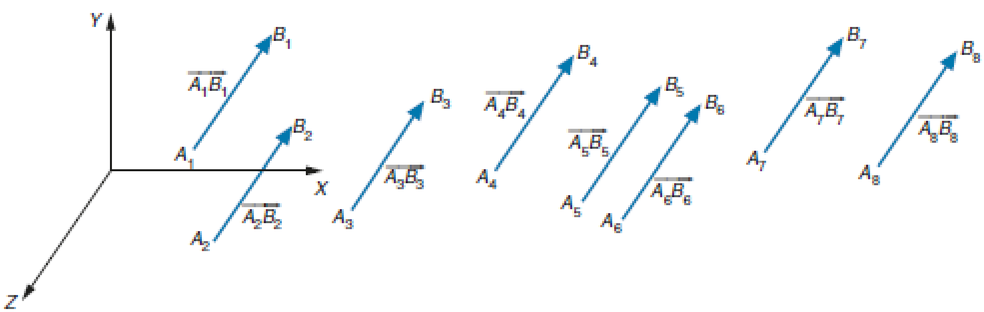
— **Dirección** o recta que lo contiene.
— **Sentido** u orientación de la recta.
— **Módulo** o longitud del segmento orientado.



- **Vector libre**. Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo sellaman **equipolentes**. Los vectores equipolentes tiene las mismas coordenadas. Todos los vectores equipolentes a uno dado definen un **vector libre.**



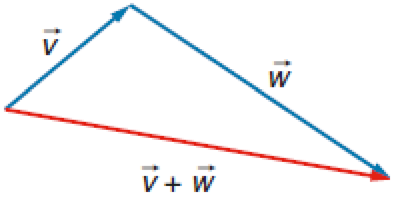
- $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$
- $|\overline{A_1B_1}| = |\overline{A_2B_2}|$



2.1. Suma de vectores libres

- La suma de los vectores libres $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\vec{v}' = (a', b', c')$ es el vector libre:

$$\vec{v} + \vec{v}' = (a + a', b + b', c + c')$$



Propiedades

1. **Asociativa.** Para tres vectores libres cualesquiera:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

2. **Elemento neutro.** El elemento neutro para la suma es el vector nulo: $\vec{0} = (0, 0, 0)$, ya que verifica:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

3. **Elemento opuesto.** El vector opuesto de un vector $\vec{v} = (a, b, c)$ es $-\vec{v} = (-a, -b, -c)$, ya que se verifica:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

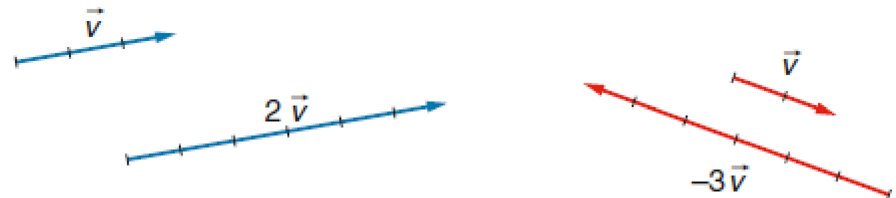
4. **Conmutativa.** Para dos vectores libres cualesquiera:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

2.2. Producto de un número real por un vector

- El producto de un número real t por un vector libre $\vec{v} = (a, b, c)$ es el vector libre:

$$t \cdot \vec{v} = t\,\vec{v} = (ta, tb, tc)$$



Propiedades

1. **Distributiva del producto respecto a la suma de vectores.** Para un número real t cualquiera y dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera se verifica:

$$t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

2. **Distributiva de la suma de números reales por un vector.** Para dos números reales t y s cualesquiera y un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:

$$(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$$

3. **Asociativa mixta.** Para dos números reales t y s cualesquiera y un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:

$$(t \cdot s) \cdot \vec{u} = t \cdot (s \cdot \vec{u})$$

4. **Elemento neutro.** Para un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

4 Geometría afín en el espacio

3. Dependencia e independência de vectores. Bases

3.1. Vectores dependientes

- **Dos vectores** son **linealmente dependientes** si verifican una de las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{c}\exists t, s \in \mathbb{R} \\ t \neq 0 \;\text{ o }\; s \neq 0\end{array}\right| t\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{array}{c}\vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen} \\ \text{igual dirección}\end{array} \Leftrightarrow \operatorname{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$$

- **Tres vectores** son **linealmente dependientes** si verifican una de las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{c}\exists t, s, r \in \mathbb{R} \\ \text{no nulos} \\ \text{a la vez}\end{array}\right| t\vec{u} + s\vec{v} + r\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{array}{c}\vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son} \\ \text{coplanarios}\end{array} \Leftrightarrow \operatorname{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1 \text{ o } 2$$

3. Dependencia e independência de vectores. Bases

3.2. Vectores independientes

- **Dos vectores** son **linealmente independientes** si verifican una de las siguientes condiciones:

$$t\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow t = s = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen} \\ \text{distinta dirección}\end{matrix} \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

- **Tres vectores** son **linealmente independientes** si verifican una de las siguientes condiciones:

$$t\vec{u} + s\vec{v} + r\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow t = s = r = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ no son} \\ \text{coplanarios}\end{matrix} \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 3$$

3. Dependencia e independência de vectores. Bases

3.3. Base de vectores

- En el espacio de vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, tres vectores linealmente independientes forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$.

La principal característica de una base de vectores es que cualquier vector del espacio **R³** puede escribirse en función de los vectores de la base.

- Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir de la forma:

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$$

Los números a, b y c se llaman coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Para localizar un punto o un objeto en el espacio necesitamos un sistema de referencia. El más utilizado es el cartesiano.

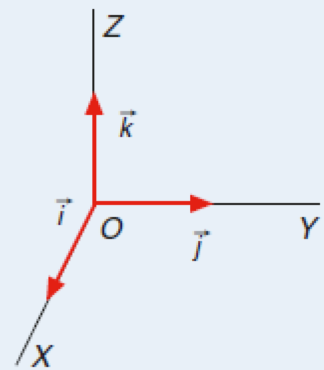
- El sistema de referencia cartesiano en el espacio $\mathbb{R}^3$ es:

$$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

y está formado por:

— Un punto fijo O que llamamos origen del sistema.

— Una base de vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ unitarios y perpendiculares entre sí, es decir, ortonormales.



4. Sistemas de referencia

4.1. Coordenadas de un punto

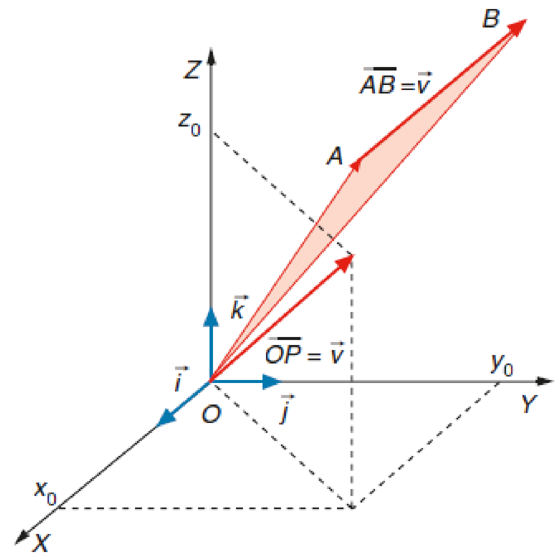
Todo punto del espacio $\mathbb{R}^3$ tiene asociadas tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

Es equivalente a escribir que:

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = (x_0, y_0, z_0)$$

4.2. Coordenadas de un vector



Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ de origen A y extremo B:

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

$$B(x_2, y_2, z_2)$$

- El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

  es decir, las coordenadas de su extremo menos las coordenadas de su origen.

- Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{AB}$ son representantes del mismo vector libre $\vec{v}$, es decir:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = (x_0, y_0, z_0) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

  de donde vemos que las coordenadas de un vector libre vienen dadas por las de uno de sus representantes con origen en el origen de coordenadas.

Sea el segmento AB, de extremos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. Observando la figura:

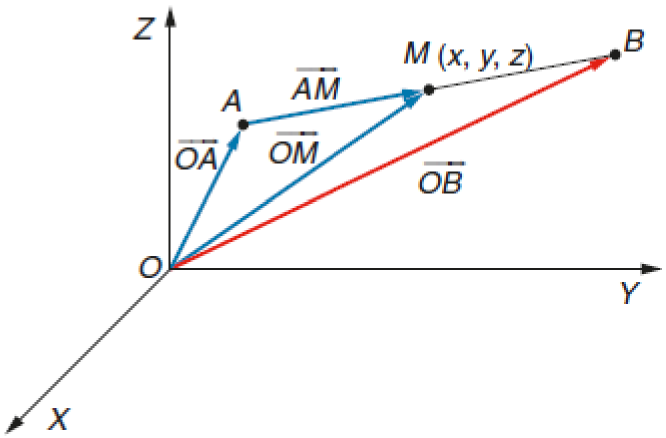
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM}$$

En coordenadas:

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) + 2(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

y operando obtenemos las coordenadas del punto medio M:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

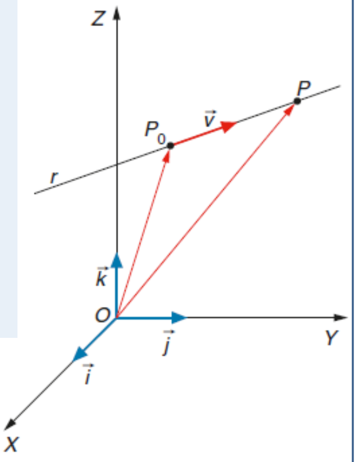


- La ecuación vectorial de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ viene dada por:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

que expresada en coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

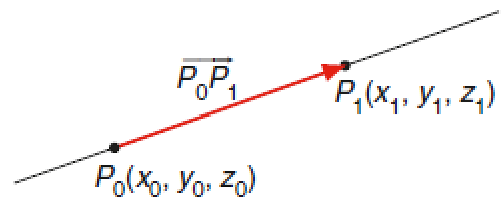


- Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

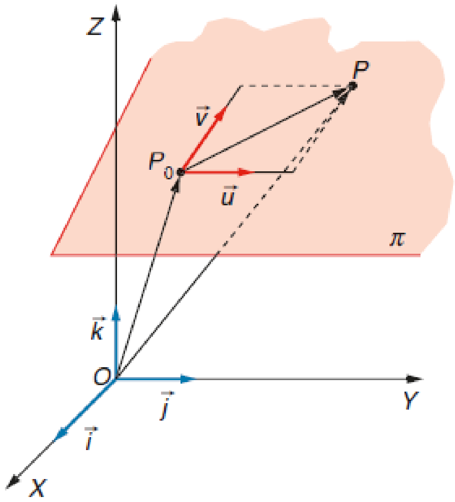
- Las ecuaciones en forma continua (o ecuación continua) de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ vienen dadas por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



- Las ecuaciones implícitas (o como intersección de dos planos) de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$



- La ecuación vectorial del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ viene dada por:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{con } t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

que expresada en coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) + s(a', b', c')$$

4 Geometría afín en el espacio

6. Ecuaciones del plano

- Las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta + sa' \\ y = y_0 + tb + sb' \\ z = z_0 + tc + sc' \end{cases} \quad \text{con } t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

- La ecuación general o implícita del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ viene dada por la ecuación:

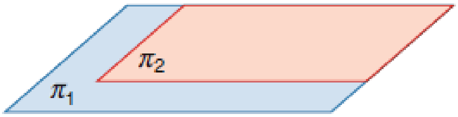
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Esta expresión se obtiene del desarrollo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

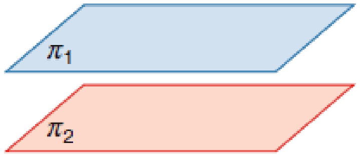
7. Posiciones relativas de dos y tres planos

7.1. Posiciones de dos planos

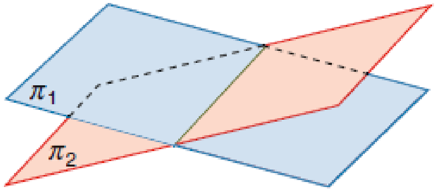


Planos coincidentes

- Rango (A) = 1 y rango (A*) = 1. El sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son dependientes y, por tanto, los planos tienen todos sus puntos en común. Los planos son **coincidentes**.
- Rango (A) = 1 y rango (A*) = 2. El sistema es incompatible. Las ecuaciones son independientes y, por tanto, los planos no tienen puntos en común. Los planos son **paralelos**.
- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 2. El sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son independientes y, por tanto, se cortan dando una recta. Los planos son **secantes**.



Planos paralelos

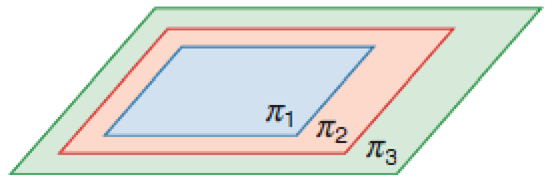


Planos secantes

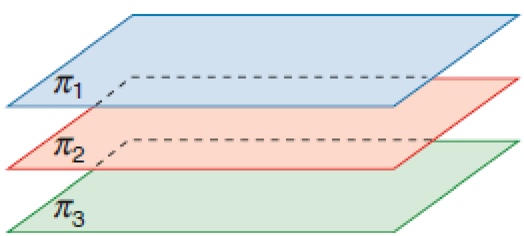
7. Posiciones relativas de dos y tres planos

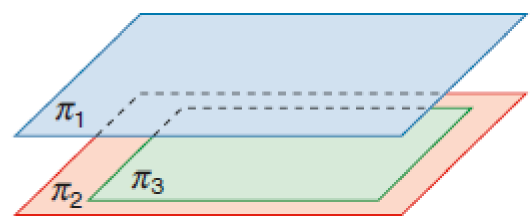
7.2. Posiciones de tres planos

- Rango (A) = 1 y rango (A*) = 1. El sistema es compatible indeterminado. Las tres ecuaciones son dependientes y, por tanto, los planos tienen todos sus puntos en común. Los planos son coincidentes.



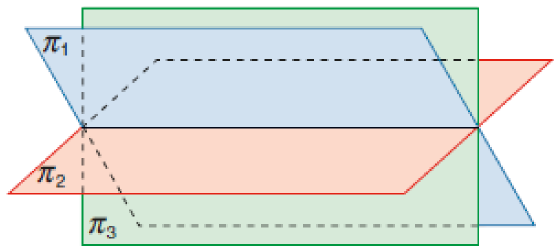
- Rango (A) = 1 y rango (A*) = 2. El sistema es incompatible. Las ecuaciones son independientes y, por tanto, los tres planos no tienen puntos en común. Los planos pueden ser paralelos y distintos dos a dos, o dos de los planos coincidentes y el otro paralelo y distinto de los anteriores.

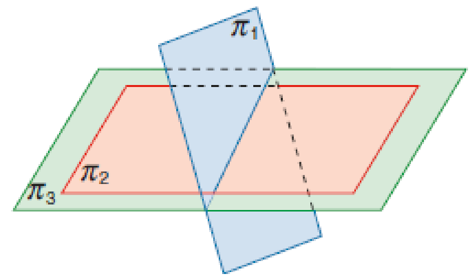




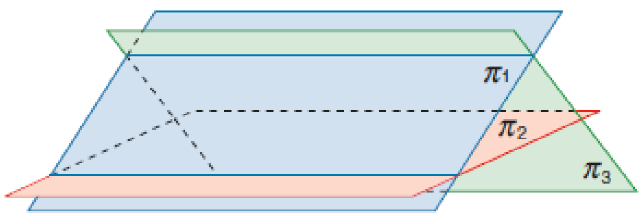
7.2. Posiciones de tres planos

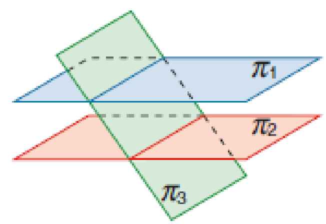
- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 2. El sistema es compatible indeterminado. Existen dos ecuaciones independientes, y la otra es combinación de ellas. En este caso, las infinitas soluciones dependen de un parámetro, y los planos tienen los puntos en común de una recta. Los tres planos son distintos y secantes en una recta, o dos de los planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.



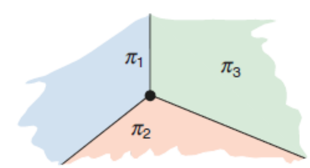


- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 3. El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común. Las opciones posibles son: los planos se cortan dos a dos, o dos de los planos son paralelos y el otro corta a los anteriores.

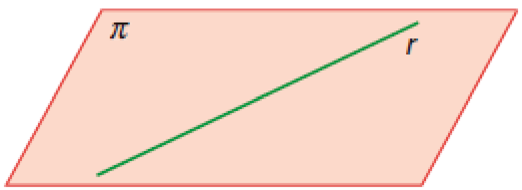




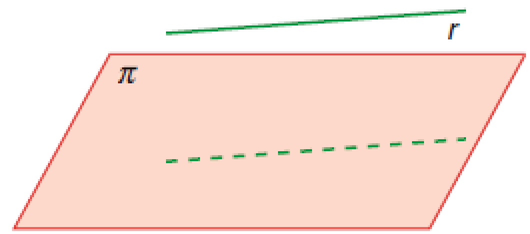
- Rango (A) = 3 y rango (A*) = 3. El sistema es compatible determinado. Los planos son secantes en un punto.



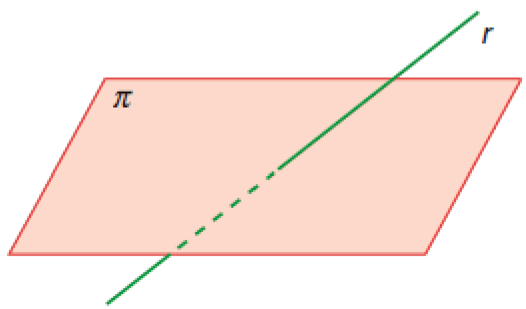
- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 2. El sistema es compatible indeterminado. Los tres planos tienen una recta en común. La recta está contenida en el plano.
- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 3. El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común. Los recta y el plano son paralelos.
- Rango (A) = 3 y rango (A*) = 3. El sistema es compatible determinado. La recta y el plano son secantes, es decir, se cortan en un punto.



Recta contenida en el plano



Recta paralela al plano



Recta y plano secantes

9. Posiciones relativas de dos rectas

- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 2. El sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas tienen infinitos puntos en común. Las dos rectas son coincidentes.
- Rango (A) = 2 y rango (A*) = 3. El sistema es incompatible. Las dos rectas no tienen puntos en común, pero son coplanarias. Por tanto, las rectas son paralelas.
- Rango (A) = 3 y rango (A*) = 3. El sistema es compatible determinado. Las rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto.
- Rango (A) = 3 y rango (A*) = 4. El sistema es incompatible. Las rectas no tienen puntos en común y, por tanto, se cruzan en el espacio.