ACTIVIDADES FINALES

1. Sean los vectores libres $\vec{u} = (3, 1, 4)$ y $\vec{v} = (3, 4, 0)$. Halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$, el módulo de cada uno de estos vectores y el ángulo que forman.

2. Halla un vector $\vec{v}$ de R^3 en cada uno de los siguientes apartados:

   a) Que sea proporcional al vector $(-2, 1, 2)$ y de módulo 9.

   b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{w} = (3, 2, 1)$.

   c) Que sea perpendicular al eje *OY* y tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ siendo $\vec{u} = (4, 1, -2)$.

3. Halla un vector de R^3 que sea linealmente dependiente con los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ y perpendicular al vector de coordenadas $(2, 3, 1)$.

4. Halla los ángulos del triángulo de vértices $A(4, -2, 2)$, $B(1, -5, 2)$ y $C(-2, 1, 1)$. ¿Qué tipo de triángulo es el *ABC*?

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores perpendiculares al vector $\vec{w}$. Demuestra que el vector $\left(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}\right)$ es también perpendicular al vector $\vec{w}$, siendo *a* y *b* números reales.

6. Halla el ángulo que forma el vector $\vec{u} = \left(0, \sqrt{3}, 1\right)$ con los ejes coordenados *OX*, *OY* y *OZ*.

7. Halla el ángulo que forman las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 4x + y + z = 8 \end{cases}$$

8. Halla el ángulo que forma el plano $3x - 2y + z - 2 = 0$ con la recta $r \equiv x + 3 = y - 2 = -z$.

9. Halla el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv x - 2z - 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + 3y - 6 = 0$.

10. Halla la distancia entre el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $4x - 2y + 4z - 3 = 0$.

11. Halla la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 2$ y $\pi_2 \equiv 4y - 6z = 2x + 3$.

12. Halla las siguientes ecuaciones:

    a) Recta que pasa por el punto $P(1, 3, 0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $3x + 4y - z = 6$.

    b) Plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

    c) Plano mediatriz del segmento de extremos $P(-2, 3, 5)$ y $Q(6, -1, 3)$.

    d) Plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 4 \\ z = -t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

13. Halla la ecuación del plano perpendicular a los planos $x - y + z = 3$, OXZ y que pase por el punto (3, 2, 1).

14. Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$ y el punto $A(1, 2, 1)$. Halla el plano perpendicular al plano π, paralelo a la recta r y que pase por A.

15. Halla el valor de t para que los puntos $A(1, -5, t)$, $B(2, t, -1)$ y $C(t, -5, 2)$ sean los vértices del triángulo ABC rectángulo en A.

16. Halla la proyección de:

a) El punto $P(1, -1, 0)$ sobre el plano $x - 2y + z + 9 = 0$.

b) El punto $A(1, -1, 0)$ sobre la recta $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

c) La recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = -y - 3 = z$ sobre el plano $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

17. Halla los siguientes puntos simétricos:

a) Del punto $P(3, -2, 5)$ respecto del origen de coordenadas.

b) Del punto $Q(1, 0, 2)$ respecto del plano $x - y + z = 6$.

c) Del punto $A(0, 3, 4)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

18. Halla el plano mediatriz del segmento de extremos $A(2, -1, 5)$ y $B(-4, 3, 1)$.

19. Ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r \equiv \begin{cases} y - 3z = -2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

20. Halla un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ que equidiste de los puntos $A(2, 0, 3)$ y $B(4, 4, -1)$.

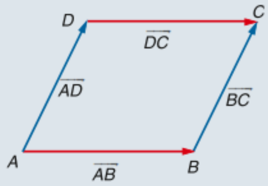
21. Halla la ecuación del plano simétrico del plano $x - y + z = 3$ respecto del origen de coordenadas.

22. Ecuación del plano de vector normal $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y que diste 8 unidades del origen de coordenadas.

23. Encuentra la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$ y es paralela a la recta, uno de cuyos vectores directores es $\vec{v} = (1, 3, -2)$.

ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Justifica que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Razona si es o no un rectángulo.



Se observa que los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -2)$ y $\overrightarrow{DC} = (1, -1, -2)$ son iguales y, por tanto, paralelos. Lo mismo les ocurre a los vectores $\overrightarrow{AD} = (3, 2, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, 2, 2)$.

El paralelogramo no es rectángulo al ser distinto de cero el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 - 2 - 4 = -3 \neq 0$$

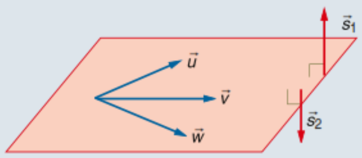
El vector de coordenadas $(x, 1, z)$ es ortogonal a los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 2)$. Halla x y z.

Las condiciones de ortogonalidad, es decir, el producto escalar nulo, nos conducen al sistema:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

La solución es $x = 1$, $z = -1/2$.

Calcula razonadamente un vector unitario que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u} = (0, 1, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{w} = (1, 1, -2)$.



Llamando $\vec{s} = (a, b, c)$ al vector que buscamos e imponiendo las condiciones de perpendicularidad, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow \quad b + 5c = 0 \\ \vec{v} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow a + b - 2c = 0 \end{array}\right\}$$

Y resolviendo el sistema resulta: $b = -5c$; $a = 7c$. Luego los vectores $\vec{s}$ buscados son de la forma:

$$\vec{s} = (7c, -5c, c)$$

y como han de ser unitarios: $|\vec{s}| = 1 \Rightarrow \sqrt{49c^2 + 25c^2 + c^2} = 1 \Rightarrow c = \pm\frac{1}{5\sqrt{3}}$, luego existen dos vectores que verifican el enunciado:

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{5\sqrt{3}}(7, -5, 1) \qquad \vec{s}_2 = -\frac{1}{5\sqrt{3}}(7, -5, 1)$$

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, -1, 2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1, 0, 1)$, $(3, 2, 1)$ y $(2, -1, 0)$. Exprésala como intersección de planos.

El plano determinado por los tres puntos dados tiene de ecuación: $x - y + 2z - 3 = 0$.

La recta está determinada por el punto $A(1, -1, 2)$ y el vector direccional $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Sus ecuaciones continuas son: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$, que expresadas como intersección de planos quedan:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

■ **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1, –1, 2) y contiene la recta definida por los planos**

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Todos los planos del haz de planos contienen la recta dada y tienen por ecuación:

$$t(x + y - 2z - 2) + s(x - 3y + z - 1) = 0 \Rightarrow (t + s)\,x + (t - 3s)\,y + (-2t + s)\,z + (-2t - s) = 0$$

e imponiendo la condición de que pase por el punto (1, –1, 2) dado, obtenemos:

$$(t + s)\,1 + (t - 3s)(-1) + (-2t + s)\,2 + (-2t - s) = 0 \Rightarrow -6t + 5s = 0 \quad ; \quad t = \frac{5}{6}s$$

Luego el plano buscado tiene por ecuación:

$$\frac{5}{6}s(x + y - 2z - 2) + s(x - 3y + z - 1) = 0 \Rightarrow 11x - 13y - 4z - 16 = 0$$

■ **Halla el punto simétrico de $A(2, 0, 1)$ respecto del plano $\pi: x + 2y + z = 2$.**

Las coordenadas del punto P, punto proyección de A sobre π, son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases}$$

Las coordenadas del punto P son:

$$x = \frac{11}{6} \qquad y = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{5}{6}$$

Llamamos A' al simétrico de A respecto de π, es decir, respecto del punto P. Considerando el punto P como punto medio del segmento AA', obtenemos:

$$A' = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

■ **Halla las coordenadas del punto de la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto (3, 2, 1).**

Sea $P(-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t)$ un punto cualquiera de la recta r. La condición de equidistancia a los puntos dados es:

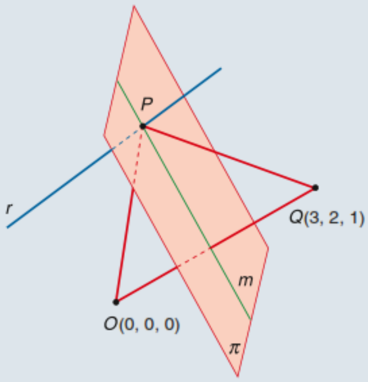
$$d(P, O) = d(P, Q) \quad \text{siendo } Q(3, 2, 1)$$

Sustituyendo valores y operando en la expresión $d(P, O) = d(P, Q)$, obtenemos $t = 2$. Este valor nos proporciona el punto buscado $P(1, 1, 2)$ de la recta r.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: el conjunto de puntos que equidistan de O y de Q son los puntos de la mediatriz m. El punto donde se corta esta con la recta r dada es el punto P buscado. El plano π, mediatriz del segmento OQ, es:

$$\pi: 3x + 2y + z - 7 = 0$$

y la intersección de este con la recta r nos da el punto $P(1, 1, 2)$.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Sean $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (a, 1, -1)$ dos vectores. Halla el valor de a para el cual los vectores $(\vec{u} + \vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ son ortogonales.

2. Sea el cubo de base $ABCD$ con $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(0, 0, 0)$. El vértice H de la base paralela $EFGH$ tiene de coordenadas $(0, 0, 2)$.

   a) Halla los restantes vértices del cubo y la ecuación del plano que los contiene.

   b) Halla el ángulo que forma la diagonal AH con la diagonal AF.

   c) Halla el volumen del cubo.

3. Halla puntos de la recta $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ que disten una unidad del plano $2x + 2y + z + 5 = 0$.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$, es paralela al plano de ecuación $2x - 4y - 2z + 3 = 0$ y está en el mismo plano que la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$.

5. Sea el triángulo de vértices $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$ y $C(0, 2, 0)$. Halla la ecuación de la altura que pasa por A.

6. Sea la recta $r \equiv \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 1}{-2} = z$. Halla la ecuación de la recta que pasando por $P(1, 1, -7)$ corte perpendicularmente a la recta dada.

7. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 3$, que pasa por el punto $P(3, 1, 2)$ y que corta al eje OZ.

8. Sean $A(-1, 12, 4)$ y $B(-4, 12, 8)$ dos vértices de un triángulo ABC. El vértice C es el punto de la recta $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 11 - 4t \end{cases}$ que está más próximo al punto A. Halla este punto y estudia cómo es el triángulo ABC.

9. a) Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$ que equidiste del origen de coordenadas y del punto $A(-2, 4, 0)$.

   b) Halla el ángulo que forma esa recta con el plano OXZ.

10. Sean el punto $R(3, 5, 1)$, la recta $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$. Halla el punto P del plano π tal que la recta RP sea paralela a la recta dada.