ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Prueba que los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Determina las coordenadas del vector (2, 4, –2) en dicha base.

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es $\det(A) = 4$. Por ser distinto de cero, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas del vector (2, 4, –2), respecto de la base formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, son los números a, b y c, que cumplen la igualdad $(2, 4, -2) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Operando sobre la igualdad anterior, obtenemos el sistema $\begin{cases} -a + b + c = 2 \\ a - b + c = 4 \\ a + b - c = -2 \end{cases}$, cuya solución: $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$ son las coordenadas buscadas.

Determina los valores de a para los cuales resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$. Obtén, en estos casos, la relación de dependencia entre los vectores.

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{pmatrix}$ es: $\det(A) = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2$

Los vectores son linealmente dependientes para los valores que anulan el determinante anterior, es decir, para $a = 1$ y $a = -2$.

En el caso que $a = 1$, la relación de dependencia entre los vectores es, por ejemplo:

$$(1, 1, -2) = -(-2, 1, 1) - (1, -2, 1)$$

En el caso que $a = -2$, los tres vectores son iguales.

Dados los puntos $A(1, 3, 5)$ y $B(-2, 4, 1)$, halla las coordenadas del punto C, perteneciente al plano OXY de forma que A, B y C estén alineados.

Para que el punto C esté alineado con A y B, debe pertenecer a la recta determinada por los puntos A y B:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-4}$$

Haciendo que el punto $C(a, b, 0)$ pertenezca a la recta anterior, $\frac{a-1}{-3} = \frac{b-3}{1} = \frac{-5}{-4}$, y resolviendo:

$$a = \frac{-11}{4} \qquad b = \frac{17}{4}$$

El punto buscado es $C\left(-\frac{11}{4}, \frac{17}{4}, 0\right)$.

Calcula el valor de a para que los cuatro puntos estén en un mismo plano $(a, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(7, 2, 1)$. Calcula la ecuación del plano.

- La ecuación del plano determinado por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(7, 2, 1)$ es:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 4y + 3z - 2 = 0 \\ \qquad\qquad \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \end{array}$$

- El punto $D(a, 0, 1)$ debe verificar la ecuación del plano, por lo que $a = -1$.

■ **Estudia la posición relativa de las rectas** $r: \begin{cases} x+z=8 \\ y+z=4 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

obtenemos:

$$\text{rango } (A) = 3 \text{ y rango } (A^*) = 4$$

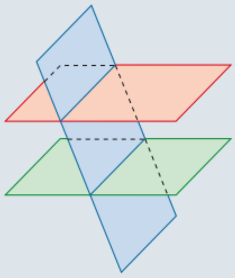
Por tanto, las rectas r y s se cruzan.

■ **Determina la posición relativa de los planos** $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 2x-2y+2z=-3 \end{cases}$

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada A^*, obtenemos:

$$\text{rango } (A) = 2 \text{ y rango } (A^*) = 3$$

Por tanto, el sistema es incompatible; los tres planos no tienen puntos en común. La posición de los planos es la siguiente: el segundo y tercer plano son paralelos, y el primero corta a los otros dos.



■ **Estudia para los diferentes valores de** m **la posición relativa de los planos:**

a) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx-y-z=-m \\ x-my+mz=m \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

a) El valor del determinante de la matriz de los coeficientes A, $\det(A) = (m-1)^2 (m+2)$, nos permite realizar la siguiente discusión según los valores de m:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $m = -2$, los tres planos se cortan dos a dos.
- Si $m = 1$, las tres ecuaciones describen el mismo plano.

b) El valor del determinante de la matriz de los coeficientes A, $\det(A) = -2m(m+1)$, nos permite llegar a los siguientes casos según los valores de m:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, los tres planos se cortan en un punto.
- Si $m = 0$, los tres planos se cortan dos a dos.
- Si $m = -1$, los tres planos se cortan en una recta.

ACTIVIDADES FINALES

1. En $\mathbb{R}^3$ consideramos los puntos $P(3, -1, 2)$ y $Q(2, 0, 3)$.

   a) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

   b) Halla las coordenadas del punto R de modo que el vector $\overrightarrow{RS}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{PQ}$ siendo $S(2, 4, 1)$.

   c) Halla las coordenadas del punto A de modo que el vector $\overrightarrow{BA}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{QP}$ siendo $B(0, 1, 3)$.

2. Sean los vectores libres $\vec{v} = (4, 2, -3)$ y $\vec{w} = (1, -2, 5)$. Dibuja estos vectores y los vectores $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{v} - \vec{w}$. Halla las coordenadas del vector $3\vec{v} - 2\vec{w}$.

3. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2\vec{v} - \vec{w} = (4, 1, 3) \\ \vec{v} + 3\vec{w} = (2, 4, -2) \end{cases}$.

4. La base canónica de $\mathbb{R}^3$ está formada por los vectores $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ y $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Comprueba que es una base y halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (8, -2, 5)$ respecto a esa base.

5. ¿Los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, 5)$ y $\vec{w} = (1, 3, 2)$ forman base de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, halla las coordenadas del vector $\vec{r} = (4, 13, 5)$ respecto a ella.

6. ¿Para qué valores de b los vectores $\vec{u} = (2, b, 1)$, $\vec{v} = (3, 2, b)$ y $\vec{w} = (1, -1, 2)$ forman base de $\mathbb{R}^3$?

7. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{u} = (-1, 2, 4)$.

8. Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(2, -3, 2)$. Halla un punto alineado con P y Q.

9. Escribe, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de la recta dada por: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z$.

10. Dada la recta r como intersección de dos planos $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$, halla dos puntos de esta recta y uno de sus vectores directores.

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

12. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(2, -3, 5)$ y es paralela al eje **OZ**.

13. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación del plano en cada uno de los siguientes apartados:

a) Que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y dos de sus vectores directores son $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ y $\vec{w} = (2, 0, -1)$.

b) Que pasa por los puntos $P(2, -1, 1)$, $Q(2, 3, 0)$ y $R(1, -2, -1)$.

c) Que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = -z$.

d) Que pasa por el punto $A(2, -3, 5)$ y es paralelo al plano de ecuación $3x - y + z - 6 = 0$.

14. Halla las ecuaciones de los ejes y de los planos coordenados.

15. Halla la ecuación general del plano de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3 - t + 2s \\ y = 1 + t - 2s \\ z = 2 - s \end{cases}$.

16. a) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2, -6, 1)$, $Q(-1, 3, 2)$ y es paralelo al eje OX.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

17. Estudia las posiciones relativas de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 5x + y + 4z = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ y - 2z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 10 \\ x - 2y - z = -5 \end{cases}$

18. Determina, en cada apartado, la posición relativa de la recta y el plano dados:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \\ z = t \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 3x + 2y - 11z - 5 = 0$

b) $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{2}$ $\quad \pi \equiv 2x - y - 4z = 0$

19. Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

20. ¿Para qué valor de m los siguientes planos se cortan dando una recta?:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z = 3;\ \pi_2 \equiv x - y + z = 2;\ \pi_3 \equiv 3x - y - mz = 4$$

En este caso, halla la ecuación de la recta.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Halla la ecuación de la recta paralela a los planos $\pi_1 \equiv 3x + 2y - z = 2$; $\pi_2 \equiv 2x - z = 4$ y que pase por el punto $P(0, 2, -1)$.

2. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, siendo:

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0 \\ 2y = 3 - z \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

3. Se consideran las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = m - z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$.

   a) Discute en función de m la posición relativa de las rectas.

   b) Para $m = 14$, halla la ecuación del plano que las contiene.

4. Encuentra la ecuación de la recta contenida en el plano $x - y = 0$ y en el plano paralelo a $2x - 3y + z = 4$ y que pase por el punto $P(1, 1, 3)$.

5. Tres vértices de un paralelogramo $ABCD$ son los puntos $A(1, 1, 6)$, $B(2, 3, 7)$ y $C(0, -6, 0)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice y la ecuación del plano que contiene a este paralelogramo.

6. Discute, según los valores de a, la posición relativa de los planos $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \\ x + 3y + (1 - a)\, z = 0 \\ 3x - ay + 2z = a - 1 \end{cases}$.

7. ¿Existen valores de a y b para los cuales los planos $\pi_1 \equiv ax - 2y + bz = 4$; $\pi_2 \equiv 2x + 4y + az = -2$ son paralelos?

8. Dos rectas en el espacio que sean coplanarias, ¿qué posiciones pueden tener? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

9. Sea el tetraedro de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(5, 3, 0)$ y $D(3, 4, 3)$.

   a) ¿Los puntos medios de las aristas AB, BD, CD y CA están en el mismo plano? En caso afirmativo, halla su ecuación.

   b) El plano anterior, ¿cómo es respecto a la recta que contiene a la arista AD?

10. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $\begin{cases} y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ y que pase por el punto de intersección de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = -y = \dfrac{z+1}{2}$ con el plano $x + z = 7 + y$.

11. ¿Para qué valores de a y b el plano $\pi \equiv 3x - y + az = b$ contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$?

12. Sea el cuadrado de centro en el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que contenga a este cuadrado.