

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$$

Los valores de los determinantes son:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = -1 \quad \text{e) } \begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Los valores de los determinantes son:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 - 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

3. Resuelve las ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1$$

Desarrollamos los determinantes, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$$

Las soluciones son  $x = -5$ ,  $x = -3$ ,  $x = 3$  y  $x = 5$ .

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0.$$

Las soluciones son  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 3 - x = -1.$$

La solución es  $x = 4$ .

6. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Las razones en cada caso son:

- a) Las filas primera y tercera son proporcionales:  $F_3 = 3 \cdot F_1$ .
- b) Las columnas primera y tercera coinciden:  $C_1 = C_3$ .
- c) La columna tercera es combinación lineal de la primera y la segunda;  $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$ .
- d) La fila tercera es combinación lineal de la primera y la segunda;  $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2$ .

7. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

a) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ( $F_1 + F_2 + F_3 \rightarrow F_1$ ), sacamos factor común 2 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \dot{\phantom{0}}$$

b) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ( $F_1 + F_2 + F_3 \rightarrow F_1$ ), sacamos factor común 3 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \dot{\phantom{0}}$$

c) Realizamos la siguiente operación con las columnas ( $C_3 + C_2 - 2 \cdot C_1 \rightarrow C_3$ ), sacamos factor común 7 de la tercera columna y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \dot{\phantom{0}}$$

d) Puede observarse que los números que forman cada una de las filas, 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados a la tercera columna, quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix} = 11 \cdot \dot{\phantom{0}}$$

**8. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:**

$$\text{a) } \begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

a) Multiplicamos y dividimos la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión  $\frac{1}{abc}$  fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante es nulo al tener dos columnas iguales.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & 1 \\ abc & b^2 & 1 \\ abc & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Comenzamos en el determinante de la derecha multiplicando y dividiendo la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión  $\frac{1}{abc}$  fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante lo trasponemos para lograr la igualdad buscada.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

**9. Sean  $F_1, F_2$  y  $F_3$  las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es  $\det(F_1, F_2, F_3) = 5$ . Calcula:**

a)  $\det(2A)$

b)  $\det(A^3)$

c)  $\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2)$

a) Teniendo en cuenta la propiedad:

*Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.*

y que el orden es 3:

$$\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40.$$

b) Teniendo en cuenta la propiedad:

*El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.*

Obtenemos:

$$\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

c) Teniendo en cuenta las propiedades:

*Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.*

*Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo.*

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = 2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3)$$

Haciendo uso de la propiedad:

*Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía.*

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3) = -2 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -6 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -30$$

10. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica  $A^2 = A$ . Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica  $AA^t = I$ . Halla  $\det(A)$ .

a) Utilizando la propiedad  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ , se obtiene:  $\det(A^2) = [\det(A)]^2$ . Por tanto:

$$[\det(A)]^2 - \det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) \cdot [\det(A) - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = 0 \\ 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades  $\det(A) = \det(A^t)$  y  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ , se obtiene:

$$\det(A \cdot A^t) = \det(I) \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = -1 \\ 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

11. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Halla los menores complementarios  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$  y  $\alpha_{31}$ , si existen.

b) Calcula, si existen, los adjuntos  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$  y  $A_{31}$ , si existen.

c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

Las respuestas son:

a) Los menores complementarios pedidos son:

En la matriz A:  $\alpha_{12} = 0$ ;  $\alpha_{22} = 2$ ;  $\alpha_{23}$  y  $\alpha_{31}$  no existen.

En la matriz B:  $\alpha_{12} = 4$ ;  $\alpha_{22} = -12$ ;  $\alpha_{23} = -8$  y  $\alpha_{31} = -16$ .

En la matriz C:  $\alpha_{12} = -6$ ;  $\alpha_{22} = -3$ ;  $\alpha_{23} = 6$  y  $\alpha_{31} = 1$ .

b) Los adjuntos pedidos son:

En la matriz A:  $A_{12} = 0$ ;  $A_{22} = 2$ ;  $A_{23}$  y  $A_{31}$  no existen.

En la matriz B:  $B_{12} = -4$ ;  $B_{22} = -12$ ;  $B_{23} = 8$  y  $B_{31} = -16$ .

En la matriz C:  $C_{12} = 6$ ;  $C_{22} = -3$ ;  $C_{23} = -6$  y  $C_{31} = 1$ .

c) Las matrices adjuntas son:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -20 \\ 6 & -12 & 8 \\ -16 & -2 & -10 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



12. Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la primera columna y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

b) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la primera columna y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 51 - 4 \cdot 68 = -527$$

c) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la segunda fila y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -295$$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Las matrices inversas de las matrices del enunciado son:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



14. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ , averigua los valores del parámetro  $a$  para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de  $A$  cuando  $a = 2$ .

El determinante de la matriz  $A$  es  $\det(A) = -a^2 + 4a - 3 = -(a-1)(a-3)$ .

La matriz no tiene inversa para  $a = 1$  o  $a = 3$ .

La matriz para  $a = 2$  es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  y su inversa es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

15. Determina, según los valores de  $a$ , el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ .

Se obtiene que:

- Si  $a = 0$ , el rango de  $A$  es 2.

- Si  $a \neq 0$ , el rango de  $A$  es 3.

16. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , halla el rango de la matriz  $A^2 - A^t$  según los distintos valores de  $a$ .

La matriz  $B^2$  es  $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ .

La matriz  $M = A^2 - A^t$  es  $M = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ .

El determinante de  $M$  es  $\det(M) = (a-2)(2a-1)$  y los valores del rango son:

- Si  $a \neq 2$  y  $a \neq 1/2$ , el rango de  $M$  es 3.

- Si  $a = 2$ , el rango de  $B$  es 2.

- Si  $a = 1/2$ , el rango de  $B$  es 2.





17. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Comprueba que  $A^{-1} = A^t$ , y utilizando el resultado anterior calcula  $(A^t \cdot A)^{20016}$ .

Calculamos  $A^{-1}$  mediante el procedimiento de Gauss-Jordan. Para ello intercambiamos las filas primera y segunda y, posteriormente la segunda y tercera, para obtener:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que  $A^t = A^{-1}$ , y la definición de matriz inversa, obtenemos la siguiente expresión:

$$A^t \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^t = I \text{ y } (A^t \cdot A)^{2016} = (A^{-1} \cdot A)^{2016} = I^{2016} = I.$$

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA\_DINERO, utilizando como matriz de cifrado  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2 x 2, es:  
16 14 33 6 22 14

¿Podrías hallar A?

a) El mensaje anterior, según el código numérico se transforma en:

2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia 2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 117 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 154 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 57 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 187 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 116 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que si los números que resultan de multiplicar por la matriz de cifrado son mayores de 28, como por ejemplo en el primer caso que son 30 y 76, hay que restar 28 las veces que sean necesarias hasta obtener un número menor que 28. En nuestro caso:

$$30 - 28 = 2 \quad \text{y} \quad 76 - 28 - 28 = 20$$

El mensaje codificado será: 2 20 14 5 14 14 21 1 14 19 13 4, que se convierte en:  
MUABAAPAFAXKY.

b) Teniendo en cuenta el código numérico inicial, la palabra Marisa se corresponde con la clave numérica:

M	A	R	I	S	A
2	14	27	6	8	14

Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matriz 2x2 buscada. Se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 14b = 16 \\ 2c + 14d = 14 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 6b = 33 \\ 27c + 6d = 6 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se obtiene:  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$  y  $d = 1$ .

La matriz es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .