ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 38

1. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

a) Las matrices son:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Tamaños} \\ & \begin{array}{cc} \textit{Grande} & \textit{Pequeño} \end{array} \\ \textit{Modelos}\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Tornillos} & \textit{Soportes} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Grande} \\ \textit{Pequeño} \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz que representa la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería es el resultado del producto que sigue:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 & 8000 & 4000 \\ 8000 & 6000 & 6000 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 112\,000 & 200\,000 & 136\,000 \\ 38\,000 & 72\,000 & 48\,000 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textit{Tornillos} \\ \textit{Soportes} \end{array} \end{array}$$

También se puede multiplicar la primera matriz del apartado a) por la segunda y obtenemos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

2. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$

Los casos posibles son:

i) b = 0, entonces a = 0 o a = 1, y d = 0 o d = 1. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) a = 1 – d, entonces $b = \pm\sqrt{d - d^2}$ con d $\in$ [0, 1]. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con d } \in [0, 1].$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz (A – kI)^2 sea la matriz nula.**

La matriz A – kI es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$.

La matriz (A – kI)^2 es:

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ `2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ -2k + 2 & -2k + 2 & 5 - 6k + k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es k = 1.

4. En una población de 100 000 consumidores, 20 000 usan la marca A, 30 000 la marca B y 50 000 ninguna de ellas. En un mes, un usuario de A tiene una probabilidad del 20% de cambiar a la marca B, y 5% de pasar a no usar ninguna de ellas. Un usuario de B tiene una probabilidad del 15% de cambiar a la marca A y 10% de no usar ninguna de ambas. Uno de los que no usa ninguna de las dos marcas tiene una probabilidad del 10% de pasar a usar la marca A y un 10% de pasar a usar B. ¿Cuántos usuarios de cada

clase habrá el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses? ¿Se estabilizarán los valores de los consumidore de cada clase?

La matriz, P, que representa las probabilidades de transición dadas es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ Ning. \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & Ning. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los tres estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \\ 50000 \end{pmatrix}$$

La matriz de estado del próximo mes:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24500 \\ 31500 \\ 44000 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz de estado del segundo mes:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24500 \\ 31500 \\ 44000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27500 \\ 32925 \\ 39575 \end{pmatrix} = X_2$$

Hallamos el valor estacionario. Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Se cumplirá: $P \cdot X_{est} = X_{est}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}75x + 0{,}15y + 0{,}10z = x \\ 0{,}20x + 0{,}75y + 0{,}10z = y \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}80z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}20x - 0{,}25y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}05x + 0{,}10y - 0{,}20z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y = -0{,}10z \\ 0{,}20x - 0{,}25y = -0{,}10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{13}z \\ y = \dfrac{18}{13}z \end{cases}$$

Como x + y + z = 100 000, se tiene como solución:

$$X_{est} \cong \begin{pmatrix} 34040 \\ 38300 \\ 27660 \end{pmatrix}$$

5. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

Calculamos $A^2 - A - 2I$ y obtenemos:

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa se es $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right)$.

Por tanto, $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma M = aI + bJ, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcula M^2 y M^3.

b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

La matriz M = aI + bJ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Las potencias cuadrada y cúbica son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n, con n natural, calculamos nuevas potencias:

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^n, con n natural, tiene la expresión: $M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

La demostración de esta última expresión puede efectuarse por el método de inducción.

7. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

La matriz M siempre es inversible, ya que a y b no pueden ser 0 simultáneamente, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.

La matriz inversa de M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

8. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que A · B = B · A. Halla todas las matrices diagonales A tales que A · A = I.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

Los productos de ambas son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La condición A · A = I nos conduce al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$**.**

La solución queda:

Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Por tanto, si m = 0 el rango es 2 y para todos los demás valores de m el rango es 3.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 64

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**: a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación det ($A^{-1} - xI$) = 0.**

a) El determinante de la matriz A es det (A) = - 1.La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando el determinante obtenemos $(1 + x)(1 + x^2) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y los números complejos i y $-i$.

2. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

La solución en cada caso es:

a) $$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2bc \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2a^2b^4c^2.$$

(1) Hemos sacado factor común a de la tercera columna, b de la segunda y bc de la primera.

(2) La suma de la primera y segunda columna la colocamos en la segunda columna. La diferencia de la tercera y la primera columna la colocamos en la tercera columna.

(3) Desarrollamos por la diagonal principal.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2.$$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.

(2) Desarrollando por la primera columna.

(3) Utilizando la regla de Sarros.

c) $$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \\ 0 & c-b & -c & a \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -b & 0 & b \\ c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a+c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = b \cdot (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b-c & -c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} =$$

= b · (a – c) · (a + b + c) · (a + b – c)

d) $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & x & 0 & 0 \\ 4+x & 0 & x & 0 \\ 4+x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3 \cdot (4+x).$$

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica B2 = 16 I, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Sea A un matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (siendo I la matriz identidad). Prueba que A admite inversa y utiliza la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.

c) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^t$, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

d) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz 2 · A vale – 16. ¿Cuál es el orden de la matriz A?

Las respuestas a los distintos apartados son:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \dots, k \cdot F_i, \dots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$$

A partir de $B^2 = 16\,I$ podemos escribir $\det(B^2) = \det(16\,I)$. Calculamos ambos determinantes:

$$\det(B^2) = \det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^2$$

$$\det(16\,I) = \det\left(16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16^3$$

Por tanto, $(\det(B))^2 = 16^3 \Rightarrow \det(B) = \sqrt{16^3} \Rightarrow \det(B) = 64$.

b) La matriz A tendrá inversa siempre que el determinante de A sea distinto de cero. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que el determinante de A es nulo. Tomando determinantes en la igualdad matricial $A^2 - 3A = -2I$ y teniendo en cuenta alguna de las propiedades de los determinantes podemos escribir:

$$\det(A^2 - 3A) = \det(-2I) \Leftrightarrow \det[A \cdot (A - 3I)] = (-2)^n \cdot \det(I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \cdot \det(A - 3I) = (-2)^n$$

En la última igualdad si el determinante de A fuese nulo, el resultado del producto sería cero, pero la potencia $(-2)^n$ no se anula nunca y, por tanto, el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

Expresamos la matriz A^{-1} en función de la matriz A. Para ello operamos en la igualdad matricial del enunciado $A^2 - 3A = -2I$, en la forma:

$$A^2 - 3A = -2I \iff -\frac{1}{2}\left(A^2 - 3A\right) = I \iff -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = I \iff A \cdot \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$.

c) No puede ser det (A) = 3 ya que se cumple:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A^t) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

d) Sea n el orden de la matriz A, entonces $\det 2 \cdot A = 2^n \cdot \det A$.

Sustituyendo en la expresión anterior los datos del enunciado, obtenemos:

$$-16 = 2^n \cdot (-1) \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

El orden de la matriz A es 4.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?
b) Estudia el rango según los valores de a.
c) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$.

a) Una matriz A es inversible si su determinante es distinto de cero. Hallamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \quad \Rightarrow -2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, A es inversible si $a \neq 0$.

b) Estudio del rango:
- Si $a \neq 0$ el rango de la matriz A es 3, ya que el determinante de A es distinto de 0.

- Si $a = 0$ el rango de A es 1, ya que tiene dos columnas con todos sus elementos nulos.

c) Calculamos la matriz $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2a & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & -a \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \quad [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Expresamos la igualdad matricial $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \\ -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4;\ a = -2 \ y \ a = 2 \\ a = 2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

El valor de A buscado es a = 2. Para este valor se cumple:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Halla el rango de las matrices M y N, según el valor del parámetro a, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 1 & a \\ 1 & 2a^2 - 2 & 2a - 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \ \textbf{y} \ N = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz M es det (M) = $(a - 1)^2 \cdot (a + 1)^2$. Esta expresión nos permite realizar el siguiente estudio del rango:

- Si a ≠ 1 y a ≠ - 1, el rango de M es 3.

- Si a = - 1, el rango de M es 2.

- Si a = 1, el rango de M es 1.

Hallamos el rango de la matriz N haciendo ceros en la matriz:

$$rango \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Las operaciones elementales que hemos hecho son:

- $F_2 - F_1 \to F_2$
- $F_3 - F_2 \to F_3$
- $F_3 - F_2 \to F_3$

El rango de la matriz N es 2 para cualquier valor de a.

Puede comprobarse que $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y que el determinante de N es 0.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **obtén razonadamente el valor de l siguientes determinantes:**

a) det (A + B) **c)** $\det\left((A+B)^{-1}\cdot A\right)$ **e) det (2ABA^{-1})**

b) $\det\left(\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right)$ **d)** $\det\left(A^{-1}\cdot(A+B)\right)$ **f) det (A^3 B^{-1})**

Teniendo en cuenta que los valores de los determinantes det (A) = 4 y det (B) = - 4 obtenemos:

a) det (A + B) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 24.$

b) $\det\left(\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \det\left((A+B)^{-1}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\det(A+B)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{192}.$

c) $\det\left((A+B)^{-1}\cdot A\right) = \det\left((A+B)^{-1}\right)\cdot\det(A) = \frac{1}{\det(A+B)}\cdot\det(A) = \frac{1}{24}\cdot 4 = \frac{1}{6}.$

d) $\det\left(A^{-1}\cdot(A+B)\right) = \det\left(A^{-1}\right)\cdot\det(A+B) = \frac{1}{\det(A)}\cdot\det(A+B) = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6.$

e) det (2ABA^{-1})= 2^3 · det (A) · det (B) · det (A^{-1}) = $2^3\cdot 4\cdot(-4)\cdot\frac{1}{4} = -32.$

f) det (A^3 B^{-1}) = $\det(A^3)\cdot\det(B^{-1}) = (\det(A))^3\cdot\frac{1}{\det(B)} = 4^3\cdot\frac{1}{-4} = -16.$

7. Resuelve la ecuación matricial B (2A + I) = AXA + B, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos en la ecuación matricial para despejar X:

B (2A + I) = AXA + B ⇒ 2BA + B = AXA + B ⇒ 2BA = AXA ⇒ 2B = AX ⇒ X = 2A^{-1}B

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y finalmente $X = 2A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}.$