

3

Sistemas de ecuaciones lineales



1. **Sistemas de ecuaciones lineales.**
Clases
2. **Teorema de Rouché-Fröbenius**
3. **Métodos de resolución de sistemas.**
Regla de Cramer
4. **Sistemas homogéneos**
5. **Eliminación de parámetros**
6. **Sistemas de ecuaciones y economía**

3

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases



- Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto formado por m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas en cada una de ellas.

Podemos escribirlo en la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En el sistema anterior llamamos:

- **coeficientes del sistema** a los números reales a_{ij} .
- **términos independientes** a los números reales b_i .
- **incógnitas** a los términos x_1, x_2, \dots, x_n que deben ser calculados.

Al **resolver un sistema** intentamos encontrar las posibles **soluciones** del mismo. Estas son los valores $x_1 = n_1, x_2 = n_2, \dots, x_n = n_n$ de las incógnitas que convierten las igualdades del sistema en identidades numéricas.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases

1.1. Clases de sistemas de ecuaciones lineales



En función del **valor de los términos independientes**, los sistemas de ecuaciones se clasifican en:

Homogéneos, si todos los términos independientes son nulos.

No homogéneos, si alguno de los términos independientes es distinto de cero.

Según su **solución**, los sistemas pueden ser:

Incompatibles, si no tienen solución.

Compatibles, si tienen solución. Estos, a su vez, pueden ser:

- **Determinados**, cuando la solución es única.
- **Indeterminados**, cuando poseen infinitas soluciones.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases

1.2. Expresiones de los sistemas de ecuaciones lineales

Expresión matricial

- El sistema anterior de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz principal} \\ \text{o matriz de los} \\ \text{coeficientes}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{de las} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz de los} \\ \text{términos} \\ \text{independientes}}}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y = 4 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$



3

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases

1.2. Expresiones de los sistemas de ecuaciones lineales

Expresión vectorial

- Llamando A_1, A_2, \dots, A_n a las columnas de la matriz de los coeficientes, el sistema anterior de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$





- Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible (tiene solución) si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A , coincide con el rango de la matriz ampliada, A^* .

Simbólicamente:

$$\text{El sistema es compatible} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$$

- Consecuencias del teorema de Rouché-Fröbenius:

- Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, entonces el sistema es incompatible.
- Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = r$, entonces el sistema es compatible.
 - Si $r = n$, entonces el sistema es determinado.
 - Si $r < n$, entonces el sistema es indeterminado.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Métodos de resolución de sistemas. Regla de Cramer

3.1. Método de Gauss



- El método de Gauss es una generalización del método de reducción y consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente.

Para ello tomamos la matriz ampliada del sistema y mediante las operaciones elementales por filas la transformamos en una matriz escalonada en ceros, es decir, con ceros bajo la diagonal. De esta forma obtenemos un sistema equivalente al inicial, en el que se pueden dar tres casos:

- Que el sistema sea incompatible, en cuyo caso no hay solución.
- Que el sistema sea compatible y determinado, en cuyo caso se resuelve fácilmente por sustitución de forma escalonada.
- Que el sistema sea compatible indeterminado, en cuyo caso nos quedarán menos ecuaciones que incógnitas. Para resolverlo lo convertimos en un sistema cuadrado pasando al segundo miembro las incógnitas necesarias.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Métodos de resolución de sistemas. Regla de Cramer

3.2. Método de la matriz inversa



- Este método consiste en escribir el sistema en forma matricial

$$A \cdot X = B$$

y despejar la matriz X , siempre que exista A^{-1} :

$$X = A^{-1} \cdot B$$

3

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Métodos de resolución de sistemas. Regla de Cramer

3.3. Regla de Cramer

$$\left. \begin{array}{l} \text{Un sistema} \\ \text{es de Cramer} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ núm. de ecuaciones} = \text{núm. de incógnitas} \\ \bullet |A| \neq 0 \end{array} \right.$$

- Regla de Cramer

El valor de cada incógnita es el cociente de dividir el determinante formado por la matriz de los coeficientes sustituyendo en ella la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita buscada por la columna de los términos independientes, por el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$



3

Sistemas de ecuaciones lineales

4. Sistemas homogéneos



La **expresión de un sistema homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Una de las características más relevantes de los sistemas homogéneos es que todos ellos son **compatibles**, es decir, siempre tienen solución, ya que la última columna de la matriz ampliada, A^* , tiene todos sus elementos nulos, lo cual deja invariable el rango de la matriz de los coeficientes y, por lo tanto, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$.

- Sea $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = r$, y n el número de incógnitas del sistema.
 - Si $r = n$, entonces el sistema es determinado (solución trivial).
 - Si $r < n$, entonces el sistema es indeterminado (infinitas soluciones).

3

Sistemas de ecuaciones lineales

5. Eliminación de parámetros



- La eliminación de parámetros de un sistema de ecuaciones es el proceso que consiste en pasar de este sistema a otro equivalente en el que no intervienen los anteriores parámetros.
- La eliminación lineal de parámetros es el **procedimiento inverso al de resolver un sistema de ecuaciones lineales que sea compatible indeterminado**, es decir, que tenga infinitas soluciones, y para ello se hace uso del teorema de Rouché- Fröbenius.

- Si el rango de la matriz A es m , los parámetros no pueden ser eliminados.
- Si el rango de la matriz A es menor que m , los parámetros pueden ser eliminados y su eliminación da lugar a un sistema de ecuaciones, en las incógnitas x_1, x_2, \dots, x_m , que tendrá $m - \text{rg}(A)$ ecuaciones.

3

Sistemas de ecuaciones lineales

6. Sistemas de ecuaciones y economía



Las **matrices *input-output*** constituyen uno de los instrumentos más importantes en el análisis de procesos de entrada y salida para la actividad económica y, en particular, para el estudio de la estructura productiva y de las interrelaciones entre distintas industrias o sectores de la misma.

Sea a_{ij} la cantidad de salida de la industria j que necesita la industria i para producir una unidad de producto en un tiempo determinado (día, semana, mes, año...). La matriz de los coeficientes se llama **matriz de entrada-salida (*input-output*)**, también llamada **matriz tecnológica**.

$$\begin{array}{c} \text{Usuario (salida)} \\ I_1 \quad I_2 \quad I_3 \\ \text{Suministro (entrada)} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$



Wassily W. Leontief (1906-1999)



Este economista, nacido en San Petersburgo y afincado en Estados Unidos desde 1931, publicó su modelo con matrices *input-output* en 1936.

Matriz de entrada-salida
(*input-output*):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz de demanda externa:

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Matriz de salidas (*outputs*):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$