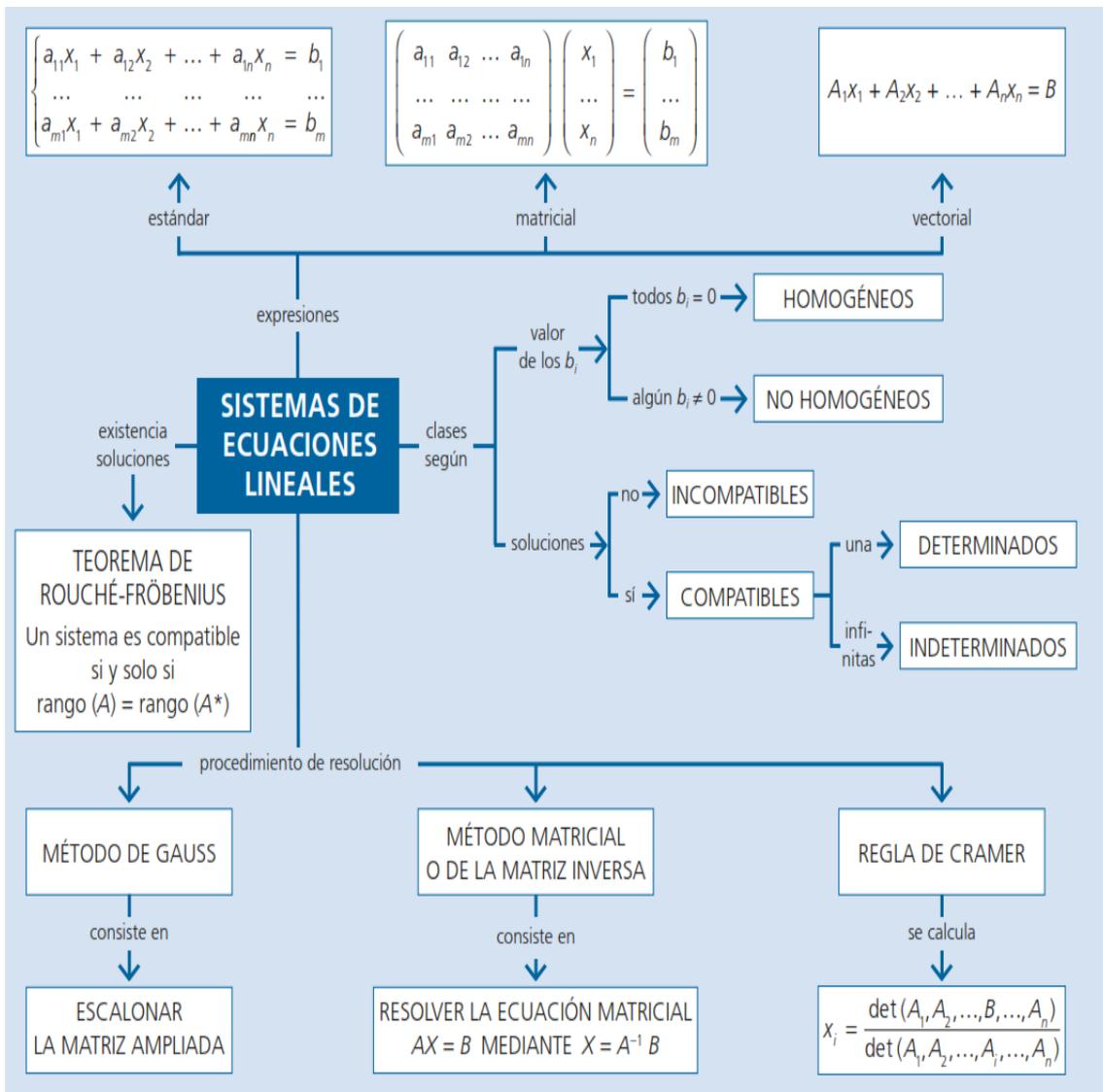


# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



## ACTIVIDADES FINALES

- 1. Expresa los sistemas siguientes de todas las formas posibles, poniendo de manifiesto, en cada caso, las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 6 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

- 2. Estudia la existencia de soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \\ -6x + 4y = 3 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z - t = 2 \\ 2x + y - z + t = -1 \\ x + 3y - 4z + 2t = -3 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - z = -1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}
 \end{array}$$

- 3. Estudia, según los valores del parámetro  $a$ , la naturaleza de los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 2a \\ x - ay = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} ax - y - z = -a \\ x - ay + az = a \\ x + y + z = -1 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ y - 2z = a \\ x + 3z = -a \\ x + y + z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

- 4. Consideramos el sistema  $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ .

- Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte incompatible.
- Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.
- Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible determinado.

- 5. Dado el sistema  $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$ , halla  $a$  para que:

- No tenga soluciones.
- Tenga infinitas soluciones.
- Tenga solución única.
- Tenga una solución en la que  $x = 3$ .

- 6. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ x + 2y = 3 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ -3x + y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 3y - z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

- 7. Resuelve los sistemas siguientes por el método de la matriz inversa:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + y - 4z = -3 \\ 2x + 3y - 5z = -4 \end{cases}
 \end{array}$$

- 8. Comprueba que los siguientes sistemas son de Cramer y encuentra su solución:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} 2x + 2y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = 8 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}
 \end{array}$$

- 9. Indica razonadamente si las parejas de sistemas que siguen son equivalentes:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

- 10. Averigua para qué valor del parámetro  $a$  los dos sistemas siguientes son equivalentes:

$$(I): \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \text{ y } (II): \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 11. Estudia, según los valores del parámetro  $a$ , la naturaleza de los sistemas siguientes y encuentra sus soluciones en los casos que sean compatibles:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax + y - z = z \\ -x + ay + z = x \\ -3x + 3y + z = y \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

- 12. Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

$$a) \begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases} \quad c) \begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$$

- 13. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

- 14. El señor García deja a sus hijos en herencia todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de lo que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media aritmética de lo que les deja a los otros dos; y al más pequeño, la media aritmética de lo de los otros dos menos 30 000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

- 15. Tres empresas A, B y C se suministran entre sí los bienes que cada una necesita de las otras, y a su vez satisfacen la demanda exterior.

La empresa A suministra a la empresa B un 11 % del material que esta necesita para hacer una unidad de sus productos, a la empresa C un 3 % y a sí misma un 28 %, y tiene una demanda exterior de 1300 unidades. La empresa B suministra a las empresas A y C, respectivamente, un 11 % y un 9 % de sus necesidades, ella necesita un 39 % de lo que fabrica, y su demanda exterior es de 5000 unidades. La empresa C necesita un 15 % de su fabricación, suministra un 6 % de lo que necesita A y un 8 % de lo que necesita B, y su demanda exterior es de 4000 unidades.

Halla la matriz de salida, es decir, la cantidad que debe producir cada una de las empresas para satisfacer la demanda interior y exterior.



- 16. Tres individuos, un agricultor (A), un ganadero (G) y un pescador (P), forman una sociedad de consumos, cuyos productos se intercambian entre ellos sin relación con otras personas. La matriz de entrada y salida correspondiente a esta economía es:

$$\begin{matrix} & A & G & P \\ A & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \\ G & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

¿Cuál debe ser la relación de precios de sus respectivos productos?

## ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

- 1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
- Calcula  $a$  de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma  $ax + y - 7z = 1$  el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.
  - Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.
- 2. Considera el sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} 2x - y + az = 1 + a \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + 3z = a \end{cases}$$
- Discute el sistema para los distintos valores del parámetro  $a$ .
  - Resuelve el sistema para  $a = 1$ .
- 3. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Halla  $a$  para que el sistema  $x \cdot A + y \cdot B = 4 \cdot C$  de tres ecuaciones y dos incógnitas  $x$  e  $y$  sea compatible determinado, y resuélvelo para ese valor de  $a$ .
- 4. Determina para qué valores del parámetro  $a$  el sistema: 
$$\begin{cases} ax + y + a^2z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + a^3y + a^2z = -3 \end{cases}$$
 admite como solución  $x = 1, y = 1, z = 1$ , y resolverlo en estos casos, comprobando que, efectivamente,  $x = 1, y = 1, z = 1$  es solución del sistema. Razona las respuestas.
- 5. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros  $a, b$  y  $c$ :
- $$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$
- Se pide:
- Justifica razonadamente que para los valores de los parámetros  $a = 0, b = -1$  y  $c = 2$  el sistema es incompatible.
  - Determina razonadamente los valores de los parámetros  $a, b$  y  $c$ , para los que se verifica  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ .
  - Justifica si la solución  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  del sistema del apartado anterior es, o no, única.
- 6. Sea el sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$$
- Discute el sistema según los valores de  $m$ .
  - Halla los valores de  $m$  para que el sistema tenga alguna solución en la que  $x = 2$ .
- 7. Por cuatro batidos, un helado y dos sándwiches nos cobraron un día en una cafetería 13 €. Otro día, por cuatro helados y cuatro sándwiches nos cobraron 20 €. Un tercer día tuvimos que pagar 9 € por un sándwich y cuatro batidos. ¿Algún día nos presentaron una factura incorrecta?
- 8. Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: «Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad». Sabiendo que entre los tres reúnen 60 €, ¿qué dinero tiene cada uno?