10. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de dimensión 2x2 cualquiera. En cada caso se cumplirá:

a) $A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & a - 2b \\ c + d & c - 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = a + b \\ a - 2c = c + d \\ b + d = a - 2b \\ b - 2d = c - 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a - 3b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a - 3b \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in R.$$

b) $B \cdot X = X \cdot B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=a \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \text{ con } a, c \in R.$$

c) $C \cdot X = X \cdot C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ c-d & 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=a-b \\ b+2d=2a \\ -a=c-d \\ -b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d-c \\ b=-2c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } c, d \in R.$$

11. Determina todas las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican $M^2 = 2M$.

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} \text{ y } 2M = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$$

La igualdad de las matrices anteriores nos da el sistema: $\begin{cases} a^2+b^2=2a \\ 2ab=2b \end{cases}$.

En la segunda ecuación se obtiene a = 1 o b = 0. Estos valores llevados a la primera ecuación nos proporcionan cuatro soluciones:

i) a = 1, b = 1 ii) a = 1, b = - 1 iii) a = 0, b = 0 iv) a = 2, b = 0

Las cuatro matrices solución son, respectivamente:

i) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iv) $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:

a) $(A^t)^t$ **b)** $(A + B)^t = A^t + B^t$ **c)** $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ **d)** $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

En cada apartado obtenemos:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A + B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$ y $(k \cdot A)^t = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$k \cdot A^t = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

13. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $A^t \cdot B$ **b)** $C^t \cdot B$ **c)** $D \cdot D^t$ **d)** $D \cdot D^t$

Los resultados de los productos son:

a) $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

c) $D \cdot D^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

d) $D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

14. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

La descomposición de la matriz M es M = S + H, siendo S la matriz simétrica, $S = \dfrac{M + M^t}{2}$ y H la matriz antisimétrica, $H = \dfrac{M - M^t}{2}$.

En cada caso se obtiene:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que A + A^t es simétrica.

b) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.
Las respuestas quedan:

a) Se tiene: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$, por tanto, la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

b) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = - A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (- A) \cdot (-A) = A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (- A) \cdot A^2 = - A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula A^{97} y B^{59}.**

En cada uno de los dos casos calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = - I \cdot A = - A$

$A^4 = A^3 \cdot A = - A \cdot A = - A^2 - (- I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = - I$

etcétera.

Observamos que las potencies de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las potencias sucesivas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una ley de recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar: $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

17. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -sen\ n\alpha \\ sen\ n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{cases} I \text{ si } n \text{ es par} \\ A \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

■ 18. Tres artesanas, Ana Berta y Carla trabajan para una marca de joyería. Elaboran conjuntos de anillos, pendientes y colgantes. Por cada conjunto realizado en oro les pagan 600 €, si es en plata 500 € y si es en acero 400 €. Las matrices N y D muestran sus producciones en los meses de noviembre y diciembre. La matriz P muestra el pago por unidad elaborada.

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Oro & Plata & Acero \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Oro & Plata & Acero \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Determina las siguientes matrices y explica qué representan:

a) N · S **b) D · S** **c) N + D** **d) (N + D) · S**

Operamos las matrices y obtenemos:

a) $N \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5400 \\ 4800 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que ha ganado cada una de las tres artesanas en el mes de noviembre.

b) $D \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 6000 \\ 6200 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada una de las tres artesanas en el mes de diciembre.

c) $N + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

La matriz muestra la producción realizada durante los meses de noviembre y diciembre.

d) $(N + D) \cdot S = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ 11400 \\ 11000 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que ha ganado cada una de las tres artesanas en los meses de noviembre y diciembre.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 36

19. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

a) Realizando la operación elemental $3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ y $F_3 + F_2 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + 4F_1 \rightarrow F_3$ y $3F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

d) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ $F_4 + 2F_4 + 2F_1 \rightarrow F_4$, $F_4 + 3F_2 \rightarrow F_4$ $2F_3 + F_4 \rightarrow F_4$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & 2 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumplirá $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ 2b - 5d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos:

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) No existe C^{-1} d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

21. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss-Jordan:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Utilizando el método de Gauss-Jordan obtenemos:

a) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \rightarrow 2F_1 + F_2$; $F_2 \rightarrow 1/3\, F_2$ y $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

b) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \rightarrow F_1 - F_2$; $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$; $F_2 \rightarrow F_2 + F_3$ y $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz inversa de B es $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

c) Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos que la matriz inversa de C es:

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

27. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es l matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

Se tiene que:

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - I \cdot 2A + I \cdot I = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I.$$

Por tanto, la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

28. Responde a las siguientes cuestiones:

- **a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$, entonces $A^2 = A$.**
- **b) Si A una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?**

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$A^2 \underset{(1)}{=} A \cdot A \underset{(2)}{=} (A \cdot B) \cdot A \underset{(3)}{=} A \cdot (B \cdot A^{-1}) \cdot A \underset{(4)}{=} A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot A \underset{(5)}{=} A \cdot B \underset{(6)}{=} A$$

y que:

- (1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz
- (2) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.
- (3) Por la hipótesis $B \cdot A^{-1} = B$.
- (4) Por la propiedad asociativa del producto.
- (5) Al ser $A \cdot A^{-1} = I$.
- (6) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.

b) Se cumple:

$$(B \cdot C) \cdot A \underset{(1)}{=} B \cdot (C \cdot A) \underset{(2)}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{(3)}{=} (B \cdot A) \cdot C \underset{(4)}{=} (A \cdot B) \cdot C \underset{(5)}{=} A \cdot (B \cdot C)$$

al ser:

- (1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.
- (2) Las matrices A y C conmutan.
- (4) Las matrices A y B conmutan.

29. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes, es decir, con el mismo rango.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$.

c) Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = 2.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ = 3

30. a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2x4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

En ambos casos existen múltiples respuestas.

a) La matriz de dimensión 2x4,

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- con rango 3 o 4 no es posible construirlas.

a) Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$ - con rango 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ - con rango 4: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

31. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Las soluciones son:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2 & a-2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a+6 \end{pmatrix}$

Si a = - 6 el rango es 1, y si a ≠ - 6 el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Si a ≠ 1 y a ≠ - 1 el rango es 3.

Si a = - 1 o a = 1 rango es 2.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

Si a ≠ - 2 y a ≠ 1 el rango es 3.

Si a = - 2 el rango es 2.

Si a = 1 el rango es 1.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 30+a & 51 & 3 \\ 0 & 11 & 20-a & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & a^2+10a-39 & 3-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+13) & 3-a \end{pmatrix}$.

Si a ≠ 3 el rango es 3.

Si a = 3 el rango es 2.