22. Calcula X tal que X – B² = A · B, siendo: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$**.**

En la ecuación tenemos que X = A · B + B^2.

Calculamos las matrices:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\4&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

23. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1&b\\a&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$

a) Operamos en ambos lados de la igualdad y obtenemos: $\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\3y-2\end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se tiene el sistema, cuya solución es:

$$\begin{cases}x+y=-3\\3x-y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5/4\\y=-7/4\end{cases}$$

b) Operamos las matrices y obtenemos: $\begin{pmatrix}1+b^2&a+bc\\a+bc&a^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se obtiene el sistema:

$$\begin{cases}1+b^2=5\\a+bc=0\\a^2+c^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\pm 2\\a+2c=0\\a^2+c^2=5\end{cases}$$

Para los dos valores de b se obtiene cuatro soluciones:

i) a = - 2, b = 2, c = 1 ii) a = 2, b = 2, c = - 1 iii) a = 2, b = - 2, c = 1 iv) a = - 2, b = - 2, c = -1.

24. Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$**.**

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sustituyendo y operando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4a + 4c - b - d & -2a - 2c \\ 12a + 16b - 3b - 4d & -6a - 8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices se obtiene:

$$\begin{cases} 4a + 4c - b - d = 6 \\ -2a - 2c = 4 \\ 12a + 16c - 3b - 4d = 22 \\ -6a - 8c = 14 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ c = -1 \\ d = -8 \end{cases}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

25. Determina la matriz X que verifica AXA − B = O, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ y\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si despejamos X de la ecuación matricial, obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$.

La matriz inversa de la matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

La matriz buscada es $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$**, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:**

a) X · A + 2B = C **b) A · X − B = C** **c) A · X · B = C**

a) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = (C - 2B) \cdot A^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot (B + C)$.

Operando con las matrices tenemos:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

32. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos en cursos según la matriz M. Una empresa de transporte elabora dos rutas R_1 y R_2. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz N. Si el precio por alumno y kilómetro de 12 euros, expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los kilómetros recorridos por cada grupo de alumnos en cada una de las dos rutas, R_1 y R_2, es:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}$$

La recaudación por curso en cada itinerario es:

$$12 \cdot \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 61248 & 54192 & 33024 & 17280 \\ 65520 & 55560 & 35580 & 17112 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}$$

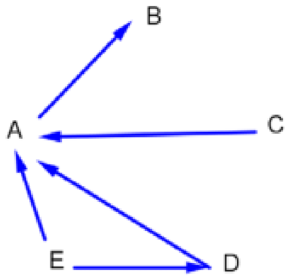
33. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: M.

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

c) Interpreta la suma de las filas de M y de sus columnas.

Dibujamos el grafo con las relaciones de influencias que se describen en el enunciado.



a) Teniendo en cuenta que los individuos de las filas influyen sobre los individuos de las columnas, como puede verse en el grafo, la matriz de influencias es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b) La matriz de influencias en dos etapas es M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de los elementos que valen 1 es:

- $a_{32} = 1$: C influye en B a través de A.
- $a_{42} = 1$: D influye en B a través de A.
- $a_{51} = 1$: E influye en A a través de D.
- $a_{52} = 1$: E influye en B a través de A.

c) La suma de las filas es 1, 0, 1, 1 y 2, respectivamente.

Estos valores significan:

Fila	Suma de la fila	Significado
Primera	1	A influye en una persona, B
Segunda	0	B no influye en nadie
Tercera	1	C influye en una persona A
Cuarta	1	D influye en una persona, A
Quinta	2	E influye en dos personas, A y D

La suma de las columnas es 3, 1, 0, 1, 0, respectivamente.

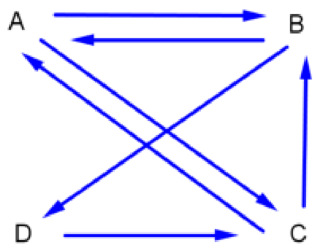
Estos valores significan:

Columna	Suma de la columna	Significado
Primera	3	A está influenciado por 3 personas, C, D y E
Segunda	1	B está influenciado por una persona, A
Tercera	0	C no está influenciado
Cuarta	1	D está influenciado por una persona, E
Quinta	0	E honesta influenciado

34. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dibujamos el grafo:



Calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de segundo orden. Así, por ejemplo:

$a_{11} = 2$ indica que A se contagia a sí mismo a través de B o C al existir los caminos A-B-A o A-C-A.

$a_{12} = 1$ indica que A contagia a B a través de un tercero al existir el camino A-C-B.

Calculamos M^3:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de tercer orden. Así, por ejemplo:

$a_{12} = 2$ indica que A contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos A-C-A-B o A-B-A-B.

$a_{32} = 2$ indica que C contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos C-A-C-B o C-B-A-B.

35. Un investigador médico estudia la difusión de un virus en una población de 1000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80% de que un cobaya infectado venza al virus y un 10% de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Infectado} & \textit{No infectado} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Infectado} \\ \textit{No infectado} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Estarán infectados la próxima semana:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = X_1$$

Estarán infectados dentro de dos meses:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma: $P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}20x + 0{,}10y = x \\ 0{,}80x + 0{,}90x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}80x + 0{,}10y = 0 \\ 0{,}80x - 0{,}10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 8x$$

Si x + y = 1000, entonces: $\begin{cases} x = 889 \\ y = 111 \end{cases}$.

36. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evolucionan el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{c} \\ +1\,hora \\ -1\,hora \end{array} \begin{array}{c} +1\,hora \quad -1\,hora \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los dos estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La matriz del día siguiente es:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz del segundo día es:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = X_2$$

La matriz del tercer día es:

$$P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 161 \end{pmatrix} = X_3$$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}25y = x \\ x + 0{,}75x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0{,}25y = 0 \\ x - 0{,}25y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 4x$$

Si x + y = 200, entonces: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 160 \end{cases}$.