ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 34

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: "¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes".

Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y el mismo; C opina que A, B y D; D opina que el mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

Expresamos la información del enunciado en una tabla, poniendo un 1 en el caso que un individuo opine de otro que aprobará el curso y un 0 en caso contrario.

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

Los valores de la tabla dan lugar a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Halla las matrices A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), de dimensiones 3x2, 3x3 y 3 x 4, cuyos elementos sean, respectivamente:

a) $a_{ij} = (2i - j)^2$ **b) $b_{ij} = i^j$** **c) $c_{ij} = (i + j)^{i-j}$**

Las matrices pedidas son:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{16} & \frac{1}{125} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{36} \\ 16 & 5 & 1 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

3. Encuentra todas las matrices de dimensión 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si los elementos de cada fila deben sumar 1 se cumplirá: $\begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ d = 1 - c \end{cases}$ y la matriz será de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ c & 1 - c \end{pmatrix}$.

Si la suma de los elementos de la primera columna deben sumar 0, se cumplirá: a + c = 0, es decir, c = - a. Sustituyendo en la matriz, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ -a & 1 + a \end{pmatrix}$$, siendo a un número real cualquiera.

4. Calcula a, b, c y de para que se cumpla $\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ d & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 4 \\ 5 & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Operamos e igualamos los elementos de las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} a+b-2 & 3a+4 \\ d+5 & c+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b-2 = 2a \\ 3a+4 = 2b \\ d+5 = 2c \\ c+7 = 2d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: a = 0, b = 2, c = 17/3 y d = 19/3.

5. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas X, Y, Z, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Las miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \end{array}$$

El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

Las matrices A_i, con i = 1, 2, 3, 4, muestran el volumen de aceite de cada uno de los almacenes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 44 & 92 & 160 \\ 72 & 116 & 176 \\ 96 & 132 & 184 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 40 \\ 18 & 29 & 44 \\ 24 & 33 & 46 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 66 & 138 & 240 \\ 108 & 174 & 264 \\ 144 & 198 & 276 \end{pmatrix}$$

El volumen total de aceite almacenado de cada calidad y de cada una de las marcas es:

$$T = \begin{pmatrix} 143 & 299 & 520 \\ 234 & 377 & 572 \\ 312 & 429 & 598 \end{pmatrix}$$

6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$**; calcula:**

a) A + B **b) A − B + C** **c) 2A + B − 3C** **d) AB − AC** **e) 2AB − 3AC + 4BC**

Los resultados de las operaciones son:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $AB - AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $2AB - 3AC + 4\,BC = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 88 \\ -32 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

7. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos posibles son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 9 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 5 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 5 \\ -4 & 12 & 7 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Encuentra, en cada caso, la matriz A que cumpla:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2A$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2A$

Las matrices buscadas son:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -6 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

9. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 16 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & -11 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Resolviendo los sistemas por reducción obtenemos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$