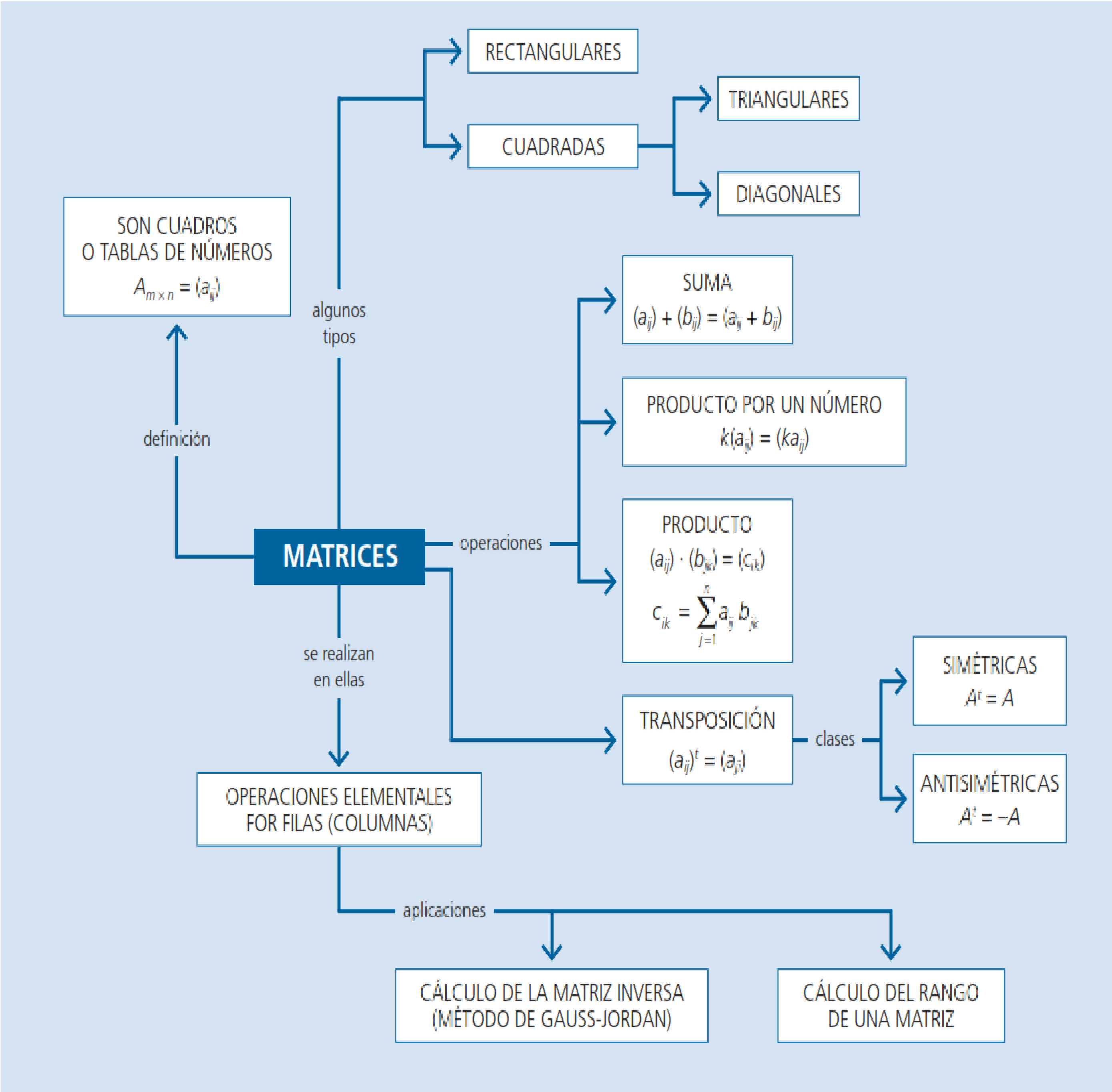
MATRICES


RECTANGULARES
CUADRADAS
TRIANGULARES
DIAGONALES
SON CUADROS O TABLAS DE NÚMEROS
$A_{m \times n} = (a_{ij})$
algunos tipos
definición
MATRICES
operaciones
SUMA
$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
PRODUCTO POR UN NÚMERO
$k(a_{ij}) = (ka_{ij})$
PRODUCTO
$(a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik})$
$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$
se realizan en ellas
TRANSPOSICIÓN
$(a_{ij})^t = (a_{ji})$
clases
SIMÉTRICAS
$A^t = A$
ANTISIMÉTRICAS
$A^t = -A$
OPERACIONES ELEMENTALES FOR FILAS (COLUMNAS)
aplicaciones
CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA (MÉTODO DE GAUSS-JORDAN)
CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

ACTIVIDADES FINALES

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de Bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: «¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes.»

   Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y él mismo; C opina que A, B y D; D opina que él mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

2. Halla las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$, de dimensiones 3 x 2, 3 x 3 y 3 x 4, cuyos elementos sean, respectivamente:

   a) $a_{ij} = (2i - j)^2$ b) $b_{ij} = i^j$ c) $c_{ij} = (i + j)^{i-j}$

3. Encuentra todas las matrices de dimensión 2 x 2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

4. Calcula *a, b, c* y *d* para que se cumpla $\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ d & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 4 \\ 5 & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas *X, Y, Z,* distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Las miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \end{array}$$

   El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y, en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B + C$ c) $2A + B - 3C$ d) $AB - AC$ e) $2AB - 3AC + 4AC$

7. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Encuentra, en cada caso, la matriz A que cumpla:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2A$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2A$

9. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 16 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & -11 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

10. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Determina todas las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican $M^2 = 2M$.

12. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:

a) $\left(A^t\right)^t = A$ b) $(A+B)^t = A^t + B^t$ c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ d) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

13. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $A^t \cdot B$ b) $C^t \cdot B$ c) $D \cdot D^t$ d) $D^t \cdot D$

14. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

15. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

b) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

17. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

18. Tres artesanas, Ana, Berta y Carla, trabajan para una marca de joyería. Elaboran conjuntos de anillos, pendientes y colgantes. Por cada conjunto realizado en oro les pagan 600 €, si es en plata 500 €, y si es en acero 400 €. Las matrices N y D muestran sus producciones en los meses de noviembre y diciembre. La matriz P muestra el pago por unidad elaborada.

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{Oro} & \textit{Plata} & \textit{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{Oro} & \textit{Plata} & \textit{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Determina las siguientes matrices y explica qué representan:

a) $N \cdot S$ b) $D \cdot S$ c) $N + D$ d) $(N + D) \cdot S$

19. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

20. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

21. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss-Jordan:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

22. Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

24. Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$.

25. Determina la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot A - B = O$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:

a) $X \cdot A + 2B = C$ b) $A \cdot X - B = C$ c) $A \cdot X \cdot B = C$

27. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es I matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

28. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$, entonces $A^2 = A$.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

29. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

30. a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2 x 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

31. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro *a*.

a) $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

32. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, *A, B* y *C,* distribuidos en cursos según la matriz *M.* Una empresa de transporte elabora dos rutas R_1 y R_2. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz *N.* Si el precio por alumno y kilómetro es de 12 euros, expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

33. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: *M.*

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

c) Interpreta la suma de las filas de *M* y de sus columnas.

34. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz *M*. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

35. Un investigador médico estudia la difusión de un virus en una población de 1 000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80 % de que un cobaya infectado venza al virus y un 10 % de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

36. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evoluciona el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1 000 estanterías grandes y 8 000 pequeñas de tipo A; 8 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo B, y 4 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

   a) Representa esta información en dos matrices.

   b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

2. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

4. En una población de 100 000 consumidores, 20 000 usan la marca A, 30 000 la marca B y 50 000 ninguna de ellas. En un mes, un usuario de A tiene una probabilidad del 20 % de cambiar a la marca B, y 5 % de pasar a no usar ninguna de ellas. Un usuario de B tiene una probabilidad del 15 % de cambiar a la marca A y 10 % de no usar ninguna de ambas. Uno de los que no usa ninguna de las dos marcas tiene una probabilidad del 10 % de pasar a usar la marca A y un 10 % de pasar a usar B. ¿Cuántos usuarios de cada clase habrá el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses? ¿Se estabilizarán los valores de los consumidores de cada clase?

5. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

6. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide:

   a) Calcula M^2 y M^3.

   b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

7. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

8. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales $\boldsymbol{A}$ tales que $A \cdot A = I$.

9. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.