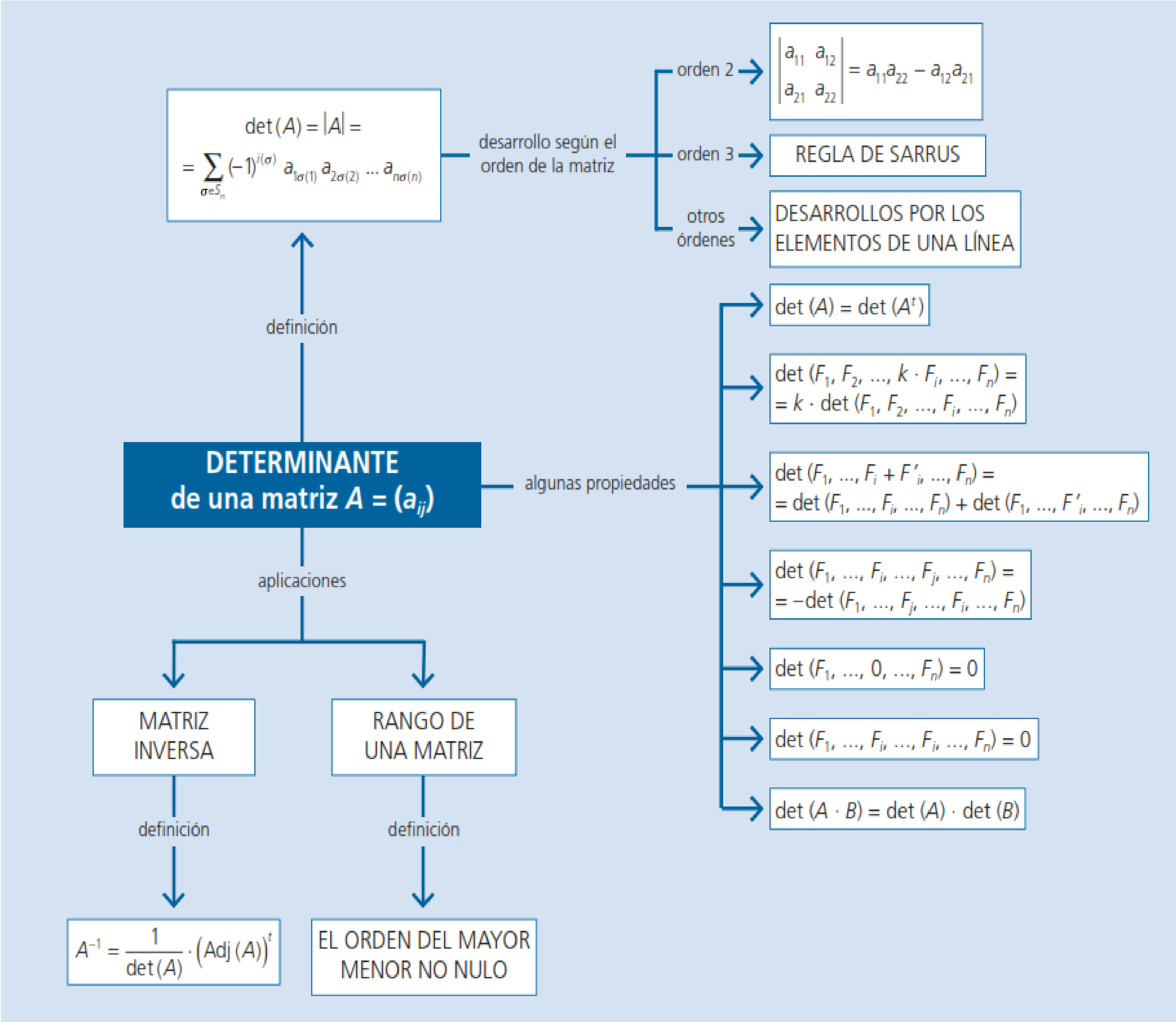
DETERMINANTES:



ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

6. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ d $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

7. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

8. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

9. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es $\det(F_1, F_2, F_3) = 5$. Calcula:

a) $\det(2A)$ b) $\det(A^3)$ c) $\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2)$

10. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $A \cdot A^t = I$. Halla $\det(A)$.

11. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31} y los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31}, si existen.

b) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

12. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando $a = 2$.

15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.

17. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $A^{-1} = A^t$, y utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{20016}$.

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado.

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2×2, es: 16 14 33 6 22 14 ¿Podrías hallar A?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación $\det(A^{-1} - x \cdot I) = 0$.

2. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3×3 que verifica $B^2 = 16\,I$, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Sea A un matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (siendo I la matriz identidad). Prueba que A admite inversa y utiliza la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.

c) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^t$, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

d) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2A$ vale -16. ¿Cuál es el orden de la matriz A?

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible? Estudia el rango según los valores de a.

b) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$.

5. Halla el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, según el valor del parámetro a:

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtén razonadamente el valor de los siguientes determinantes:

a) $\det(A + B)$

b) $\det\left(\frac{1}{2}(A + B)^{-1}\right)$

c) $\det\left((A + B)^{-1} \cdot A\right)$

d) $\det\left(A^{-1} \cdot (A + B)\right)$

e) $\det(2A \cdot B \cdot A^{-1})$

f) $\det(A^3 \cdot B^{-1})$

7. Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = A \cdot X \cdot A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$