11 Representación gráfica de funciones

1. Dominio y recorrido de una función
2. Puntos de corte con los ejes. Simetría. Periodicidad
3. Asíntotas y ramas infinitas
4. Monotonía. Extremos relativos. Concavidad. Puntos de inflexión
5. Intervalos de signo constante. Regiones
6. Representación gráfica de funciones

Representación gráfica de funciones

1. Dominio y recorrido de una función

Dominio

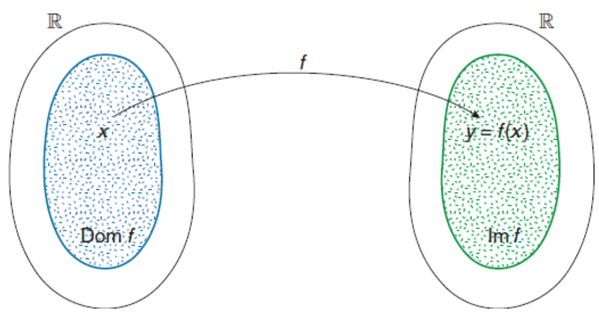
- Dominio de una función f es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que puede tomar la variable independiente para los cuales está definida la función:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Conjunto imagen o recorrido

- Conjunto imagen o recorrido de una función f es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la variable dependiente:

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$



Puntos de corte con los ejes

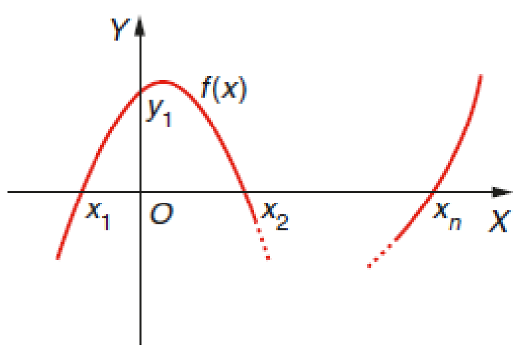
- Para determinar los puntos de corte con el eje de abscisas OX se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

- Para determinar los puntos de corte con el eje de ordenadas OY se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Cortes con los ejes



Cortes con OX:

$(x_1, 0); (x_2, 0); \ldots; (x_n, 0)$

Cortes con OY:

$(0, y_1)$

Simetrías

- Una función es par o simétrica respecto del eje de ordenadas si se verifica:

$$f(x) = f(-x); \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

- Una función es impar o simétrica respecto del origen de coordenadas si se verifica:

$$f(x) = -f(-x); \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

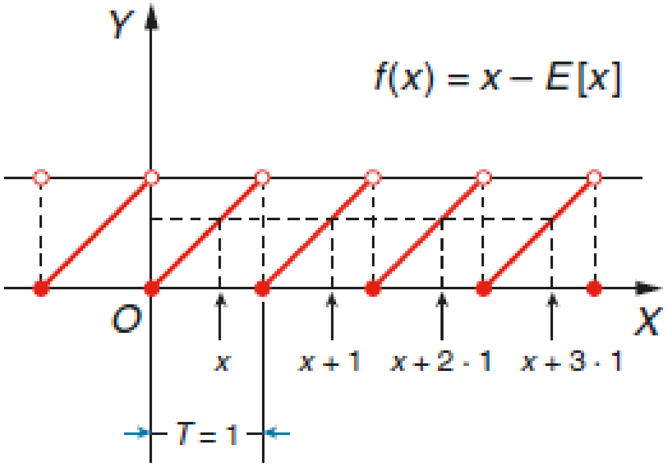
Simetría respecto del eje de ordenadas. Una función con este tipo de simetría define una simetría axial de eje *OY*, por lo que esta simetría se visualiza colocando un espejo con su canto coincidente con *OY* y perpendicular al plano *OXY*.

Simetría respecto del origen de coordenadas. Una función con este tipo de simetría define una simetría central o un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°, por lo que esta simetría se visualiza fácilmente mediante este giro.

Periodicidad

La función mantisa $f(x) = x - E[x]$, o función que nos da la parte decimal de un número real, es periódica de período 1, pues verifica:

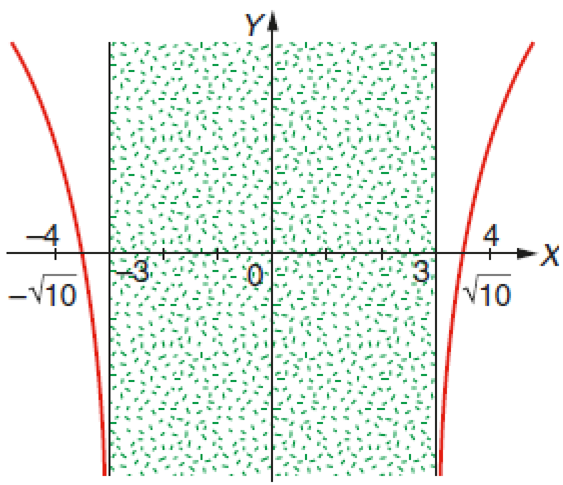
$$f(x) = f(x + K \cdot T);\ K \in \mathbb{Z}$$
$$T = 1,\ \text{período principal}$$



$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2 \cdot 1) =$$
$$= f(x + 3 \cdot 1) = \ldots = f(x + K \cdot 1)$$

Asíntotas verticales

- La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función f cuando existe al menos uno de los seis límites siguientes:
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

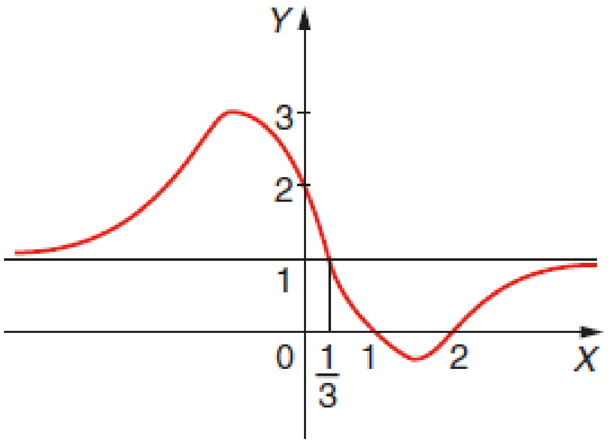


Función $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

Asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 3$

Asíntotas horizontales

- La recta $y = y_0$ es una asíntota horizontal de la función f cuando existe al menos uno de los siguientes límites:
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$



Función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

Asíntota horizontal: $y = 1$

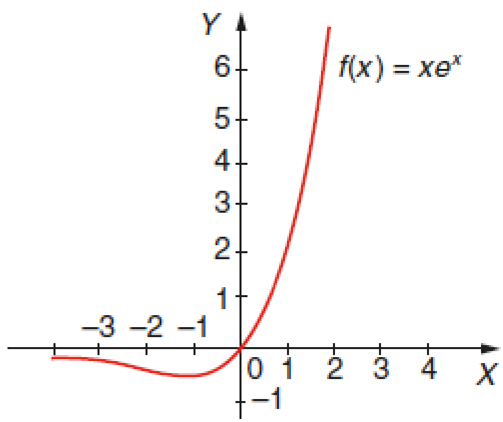
Asíntotas oblicuas

- La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la función f cuando la pendiente m y la ordenada en el origen b pueden obtenerse mediante los siguientes límites:
  - $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
  - $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] \to \begin{cases} 0^+ & \text{por encima} \\ 0^- & \text{por debajo} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] \to \begin{cases} 0^+ & \text{por encima} \\ 0^- & \text{por debajo} \end{cases}$

Ramas infinitas parabólicas

- La función f tiene una rama infinita parabólica cuando existe al menos uno de los siguientes límites y la gráfica no se aproxima a ninguna recta:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



↑ Rama parabólica cuando $x \to +\infty$

4. Monotonía. Extremos relativos. Concavidad. Puntos de inflexión

Monotonía

- Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ la función f es estrictamente creciente en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ la función f es estrictamente decreciente en x_0.

Extremos relativos

- $f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)). \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)). \end{cases}$

Concavidad

- Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y negativas en x_0.

Puntos de inflexión

- $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $(x_0, f(x_0))$.

11 Representación gráfica de funciones

5. Intervalos de signo constante. Regiones

- Si una función f es continua en $\mathbb{R}$ o solo tiene discontinuidades de salto infinito, esta función conserva el signo en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); \ldots ; (x_n, +\infty)$$

siendo $x_1, x_2, x_3, \ldots , x_n$ los ceros y los puntos de discontinuidad de salto infinito de la función f, ordenados de forma creciente.

Esta propiedad nos permite dividir el plano en regiones, cada una de las cuales está delimitada por el eje de abscisas y las rectas verticales de ecuaciones $x = x_i$.

Las regiones permitidas vienen determinadas por el signo que tiene la función en cada intervalo (x_i, x_{i+1}).

Para calcular el signo de la función f en cada intervalo, se toma cualquier valor del mismo y se sustituye en la función.

6. Representación gráfica de funciones

Para **representar** la **gráfica** de una función cualquiera, dada en su forma explícita, podemos hacer un **estudio** consistente en analizar las características que figuran en la siguiente tabla.

Los resultados obtenidos se llevan a un sistema de ejes cartesianos y nos permiten obtener la gráfica de la función.

• Dominio.
• Recorrido o conjunto imagen.
• Simetrías y periodicidad.
• Puntos de corte con los ejes.
• Asíntotas y ramas infinitas.
• Monotonía: crecimiento y decrecimiento.
• Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.
• Tipo de concavidad.
• Puntos de inflexión.
• Intervalos de signo constante.
• Tabla de valores.

6. Representación gráfica de funciones

En la **práctica** no suele ser necesario hacer un estudio tan exhaustivo, siendo suficiente **analizar las siguientes características:**

- Dominio.
- Simetrías y periodicidad.
- Puntos de corte con los ejes.
- Asíntotas y ramas infinitas.
- Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos de signo constante.