REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES — estudiando

- DOMINIO

  $$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

- CONJUNTO IMAGEN O RECORRIDO

  $$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$

- PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES
  - Eje OX: $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$
  - Eje OY: $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$

- SIMETRÍAS
  - Función par o simétrica respecto de OY:

    $f(x) = f(-x)$; $\forall x \in \text{Dom } f$
  - Función impar o simétrica respecto del origen:

    $f(x) = -f(-x)$; $\forall x \in \text{Dom } f$

- PERIODICIDAD

  $f(x) = f(x + K \cdot T)$; $\forall K \in \mathbb{Z}$

  T es el período principal

- ASÍNTOTAS
  - Verticales: $x = x_0$
  - Horizontales: $y = y_0$
  - Oblicuas: $y = mx + b$

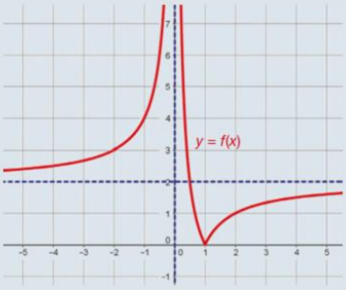
- MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

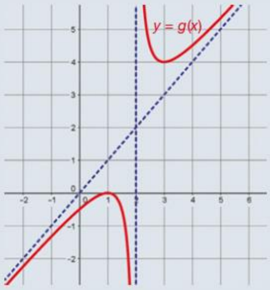
- TIPOS DE CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

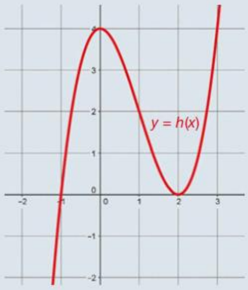
- INTERVALOS DE SIGNO CONSTANTE

ACTIVIDADES FINALES

1. Describe las siguientes funciones indicando sus dominios, recorridos, puntos de corte con los ejes, asíntotas, ramas infinitas, intervalos de monotonía y curvatura y sus puntos singulares:







2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x-2| + x$

b) $f(x)\dfrac{|x-2|}{x-2}$

c) $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

d) $f(x) = |x-2| - |x+2|$

e) $f(x) = x^3 - 3|x|$

f) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

3. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x+3)$

b) $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$

c) $f(x) = -3x^3 + 3x$

d) $f(x) = x^4 - x^3$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

f) $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$

g) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

h) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$

i) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

4. Dada la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d para que tenga un punto de inflexión en $(1, -3)$ y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3. Representa gráficamente la función que resulta.

5. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{1-x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2x+3}$

g) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

h) $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$

i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

k) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

l) $f(x)=\dfrac{x^3}{3x+3}$

6. Encuentra el valor del parámetro k para que la recta $y = x + 2$ sea la asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+k)^2}$. Representa la función obtenida y encuentra el punto de corte de la gráfica con la asíntota.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

b) $f(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$

e) $f(x)=\sqrt{4+x^2}$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x + 2)$

b) $f(x) = \ln|x + 2|$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$

d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

e) $f(x) = (x - 2)\cdot e^x$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

g) $f(x) = (x + 1)\cdot e^{-x}$

h) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

i) $f(x) = x\cdot\ln x - 2x$

j) $f(x) = x\cdot\ln x$

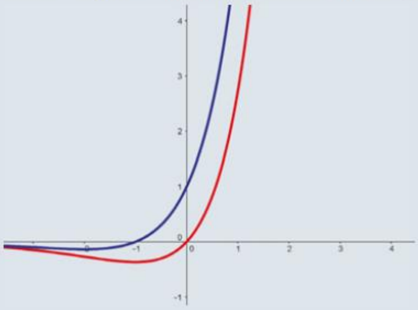
k) $f(x) = e^x + \ln x$

l) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

9. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a\ln x + b$ se corten en el punto $(e^2, 2e^{-2})$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación de las funciones resultantes.

10. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x\cdot(x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x)=\dfrac{-x^4}{4(x-1)}$.

11. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones, la de la función $f(x) = x\cdot e^x$ y la de su derivada $f'(x)$. Distingue una de la otra, justificando razonadamente por qué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.



12. Determina los coeficientes a, b, c y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra el dibujo.

13. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función:

$$N(t)=\frac{60}{1+2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es la concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Dadas las funciones polinómicas $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

   a) Halla aquellas cuya derivada segunda sea $x - 1$.

   b) ¿Cuál o cuales de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$?

   c) Realiza su representación gráfica.

2. Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$:

   a) Calcula a y b para que la gráfica pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal.

   b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.

3. Representa gráficamente las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$ b) $f(x) = x - \ln x$ c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

4. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{e^x}{1 - x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

5. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

   $y = \sqrt{16 - x^2}$ $x^2 = 12\,(y - 1)$

6. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$. En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ deja a la curva y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

   a) Determina la ecuación de la tangente.

   b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula se encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

   c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra las coordenadas del punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

7. Dada la función $f(x) = x^2 \cdot |x - 3|$, halla:

   a) Los puntos en los que $f(x)$ no es derivable.

   b) Sus máximos y mínimos relativos.

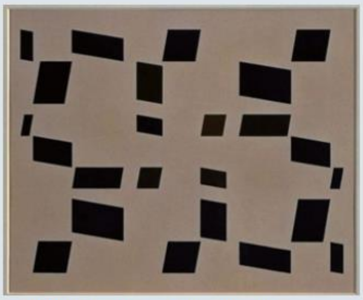
   c) Su representación gráfica.

8. Dada la función $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:

   a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

   b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   c) Dibuja la gráfica de $y = f(x)$.



↑ **Metaesquema,** de Hèlio Oiticica.