APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en x_0

EXTREMOS RELATIVOS

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} \bullet\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)) \\ \bullet\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

aplicación

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

CONCAVIDAD

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacias las y positivas en el punto $(x_0, f(x_0))$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacias las y negativas en el punto $(x_0, f(x_0))$

PUNTOS DE INFLEXIÓN

- $f''(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

- Teorema de Rolle
- Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado
- Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

CÁLCULO DE LÍMITES

- Regla de L'Hôpital, que permite resolver todos los tipos de indeterminaciones

ACTIVIDADES FINALES

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = -3x + 5$ c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ e) $f(x) = e^{2x}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

   b) $f(x) = x^2 - 6x$ d) $f(x) = 3^{-x}$ f) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ h) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$ d) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ g) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

   b) $f(x) = x^2 \cdot (x + 3)$ e) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$ f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ i) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

3. Determina el valor o los valores de a para que sea creciente la función $f(x) = \dfrac{x-a}{x-1}$.

4. Halla b y c para que la función $f(x) = x^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $(-2, -7)$.

5. Determina a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $(2, -9/2)$ y se anule para $x = 5$.

6. Obtén el valor de a, b, c y d sabiendo que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene extremos relativos en los puntos $(-1, 6)$ y $(2, -21)$.

7. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$ e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

   b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$ d) $f(x) = (x^2 - 14) \cdot e^x$ f) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

8. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de las funciones:

   a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ b) $g(x) = x \cdot \ln x - 2x$ c) $h(x) = \text{sen } 2x$

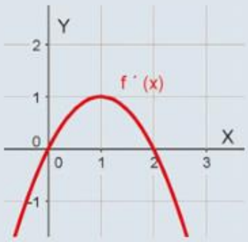
9. Calcula a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por el punto $A(0, -1)$ y en $B(1, 3)$ tenga un punto de inflexión con tangente perpendicular a la recta de ecuación $x + 2y = 3$.

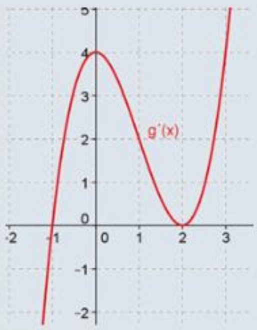
10. Los dibujos muestran las gráficas de las funciones derivadas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Determina a partir de las gráficas, para cada una de ellas:

    a) Los extremos relativos e intervalos de monotonía de la función $f(x)$ y $g(x)$.

    b) Los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura de la función $f(x)$ y $g(x)$.

    c) La gráfica aproximada de la función $f(x)$ y $g(x)$.





■ 11. Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble que el otro y que la suma de los cuadrados de los tres sea mínima.

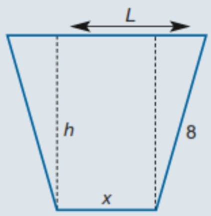
■ 12. Sean x e y dos números cuyo producto es 16. ¿Puede ser la suma $x + y$ menor que 7? Razona la contestación.

■ 13. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 270 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 5 € cm^2 y para la base un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.

■ 14. Dada la parábola $y=\frac{1}{3}x^2$, y la recta $y = 9$, halla las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima que tiene un lado en la recta y los otros dos vértices en la gráfica de la parábola.

■ 15. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitud x y $100 - x$. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero, y con el otro un cuadrado. Sea $f(x)$ la suma de las áreas. ¿Para qué valor de x dicha suma es mínima?

■ 16. Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros (ver esquema de la sección en el dibujo).

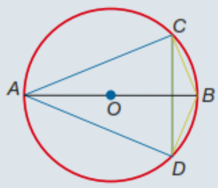


a) Encuentra el valor del segmento L del dibujo en función de la variable x (anchura inferior del canal) y teniendo en cuenta el área de un trapecio, comprueba que, en este caso, el área de la sección viene dada por:

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

b) Calcula el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima.

■ 17. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a dicho diámetro.



¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?

■ 18. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Calcula dicha área.

■ 19. Sea $f\colon [1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?

■ 20. La fabricación de un número x de tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x) = 1\,500x + 1\,000\,000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x) = 4000 - x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

■ 21. En cierto experimento, la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3} \quad t\in[1,10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas.

22. Comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = 3\cos^2 x$ en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Calcula también el valor al cual se refiere la tesis del teorema.

23. Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$. Calcula el punto del intervalo $(1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema.

24. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}+\cos x}$.

a) Verifica que $f(0) = f(\pi) = 0$.

b) Comprueba que la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene ninguna solución en el intervalo $(0, \pi)$.

c) Explica por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle en este caso.

25. Calcula los valores de a, b y c para que a la función $f(x)$ pueda aplicársele el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 7]$, y encuentra el valor que predice el teorema:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 3 \\ bx+c & \text{si } x>3 \end{cases}$$

26. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 + ax - 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Para este valor de a, calcula el punto $c \in (0, 1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea paralela al eje OX.

27. Sea la función $f(x)=1-x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

28. Aplica el teorema de Cauchy a las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en $[-1, 1]$.

b) $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x + 2$ en $[0, 2]$.

29. Estudia si el teorema de Cauchy se puede aplicar a las funciones $f(x) = x^3 + x$ y $g(x) = x + 3$ en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, encuentra el punto que hace que se verifique el teorema.

30. Analiza si se puede aplicar el teorema de Lagrange a las siguientes funciones en los intervalos dados y, cuando sea posible, halla el valor de c que da el teorema:

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en $[2, 5]$.

b) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}-2$ en $[-1, 1]$

31. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } -2\leq x\leq -1 \\ (x^2-3)/2 & \text{si } -1< x\leq 0 \end{cases}$.

a) Prueba que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$.

b) Encuentra los puntos cuya existencia afirma el teorema.

32. ¿Se puede aplicar, en el intervalo $[0, 1]$, el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.

33. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x - 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la secante que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(e, 0)$.

■ 34. Utilizando el teorema del valor medio de Lagrange, demuestra que si f es una función real continua en un intervalo $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es una función creciente en el intervalo $[a, b]$.

■ 35. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{x^2-b}{2} & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$.

Averigua si existen valores de a y b para los que la función satisface las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[-2, 2]$. En caso afirmativo, halla el punto al que se refiere el teorema.

■ 36. Dada la función $f(x)\ x^{\sqrt{x^2-4x+7}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 4$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

■ 37. De una función $f\colon [2, 5] \to \mathbb{R}$, se sabe que es derivable y que los valores mínimo y máximo de su función derivada f' son 7 y 9, respectivamente. Justifica, mediante el teorema del valor medio, cuáles de los siguientes casos no pueden darse:

I) $f(2) = 6$ y $f(5) = 8$. II) $f(2) = 6$ y $f(5) = 30$. III) $f(2) = 6$ y $f(5) = 300$.

■ 38. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen}x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-e^{-x}-x}{x\cdot\operatorname{sen}(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\cdot\ln(x+1)}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+3\operatorname{sen}x)^{\frac{2}{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{x}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x)^{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln(2-e^x)}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>1$ y $b>1$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x)^{\frac{2}{\operatorname{sen}x}}$

■ 39. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x+b\operatorname{sen}x}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

■ 40. Calcula, en cada caso, el valor de los parámetros para que se cumplan las igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\operatorname{sen}x}=2$

■ 41. Halla los valores de $x \in [0, 2\pi]$ en los que la función $f(x) = e^x \cdot \cos x$ presenta extremos relativos y/o puntos de inflexión.

■ 42. Demuestra que $e^x \geq 1 + x$ con $x \geq 0$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{e^x}$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

2. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles, la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

   ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál es esa producción?

3. Determina, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.

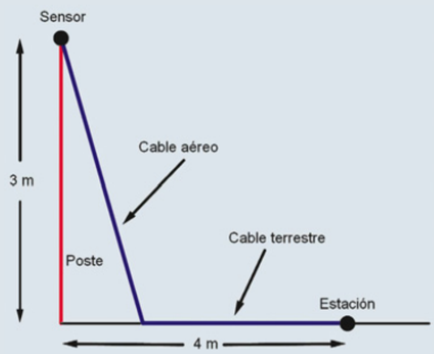
4. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4{,}5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto (0, 0). Obtén razonadamente:

   a) La distancia del meteorito al Sol desde el punto P de su trayectoria cuya abscisa es x.

   b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. Calcula esta distancia mínima.

5. Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge los datos meteorológicos. Dichos datos deben trasmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento que está situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (ver dibujo).

   El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3 000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1 000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



6. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que este tenga volumen máximo.

7. Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{si } x\leq 0\\ x^2+ax & \text{si } x>0\end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 1\right]$.

   Calcula el valor $c \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

8. Encuentra los ceros de la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 12x + a$. Prueba que, con independencia del valor de a, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no tiene dos soluciones distintas en el intervalo $[-2, 2]$.

9. Considera la función f: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$. Comprueba si cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange y, en caso afirmativo, encuentra todos los puntos a los que hace referencia el teorema.

10. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot \operatorname{sen} x - x\,e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

11. Prueba que si $x > 0$, se cumple: $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$.