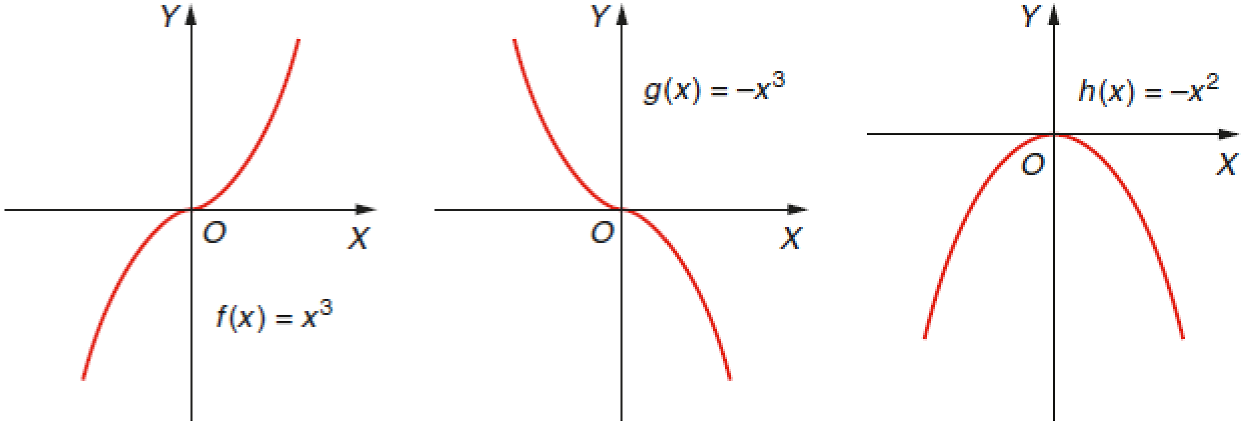
10 Aplicaciones de las derivadas

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente en x_0.

Las tres funciones siguientes tienen derivada nula en $x = 0$ y, sin embargo, f es estrictamente creciente en $x = 0$; la función g es estrictamente decreciente en $x = 0$ y h no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente en $x = 0$.



- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es negativa, entonces la función f presenta un máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es positiva, entonces la función f presenta un mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Simbólicamente:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)) \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$f^{(n)}(x_0) < 0;\ n$ par

$\Downarrow$

f tiene máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

$f^{(n)}(x_0) > 0;\ n$ par

$\Downarrow$

f tiene mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

3. Optimización de funciones

En matemáticas son numerosas las situaciones de **optimización** de funciones; por ejemplo, la determinación de la distancia a la que debemos colocarnos delante de un cuadro para verlo con el mayor ángulo posible (problema de Van Schooten).

Los casos más sencillos de optimización de funciones son aquellos en los que la función a optimizar **depende de una sola variable.** Veamos los **pasos** a seguir para optimizar funciones:

- Optimización de funciones
  1. Expresar la función que deseamos optimizar.
  2. Si la función tiene más de una variable, relacionar las variables con los datos del enunciado para conseguir una función de una variable.
  3. Obtener los máximos y los mínimos de la función.
  4. Comprobar que los resultados obtenidos tienen sentido y se adecuan a las condiciones del enunciado.

4. Concavidad o curvatura de una función

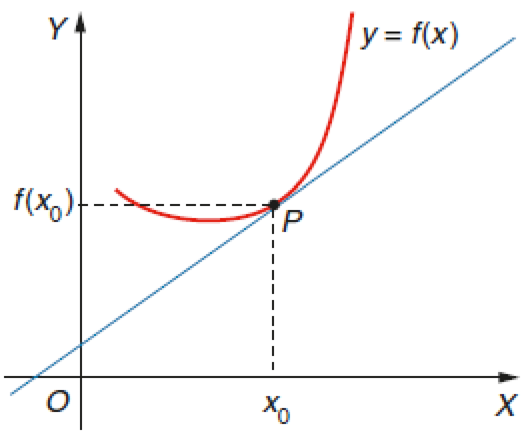
La posición de los puntos de una curva, próximos al punto de abscisa x_0 , respecto de la tangente a la curva en x_0 , nos muestra la **curvatura** de la función, es decir, si la **concavidad es hacia arriba** o **hacia abajo:**

- Una función *f* es cóncava hacia las *y* positivas o cóncava hacia arriba en un punto *P*, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a *P* están situados por encima de la recta tangente en *P*.
- Una función *f* es cóncava hacia las *y* negativas o cóncava hacia abajo en un punto *Q*, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a *Q* están situados por debajo de la recta tangente en *Q*.

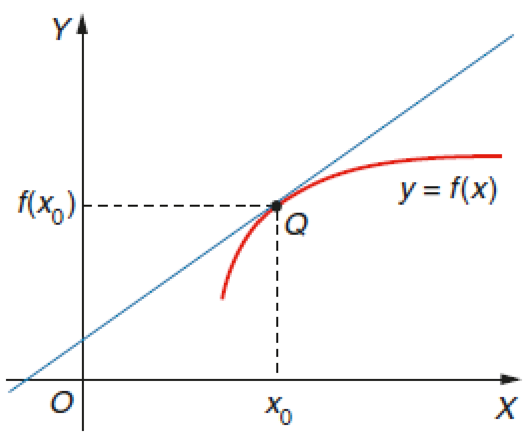
4. Concavidad o curvatura de una función

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia las y positivas en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f''(x_0) < 0$, entonces f es cóncava hacia las y negativas en el punto $(x_0, f(x_0))$.

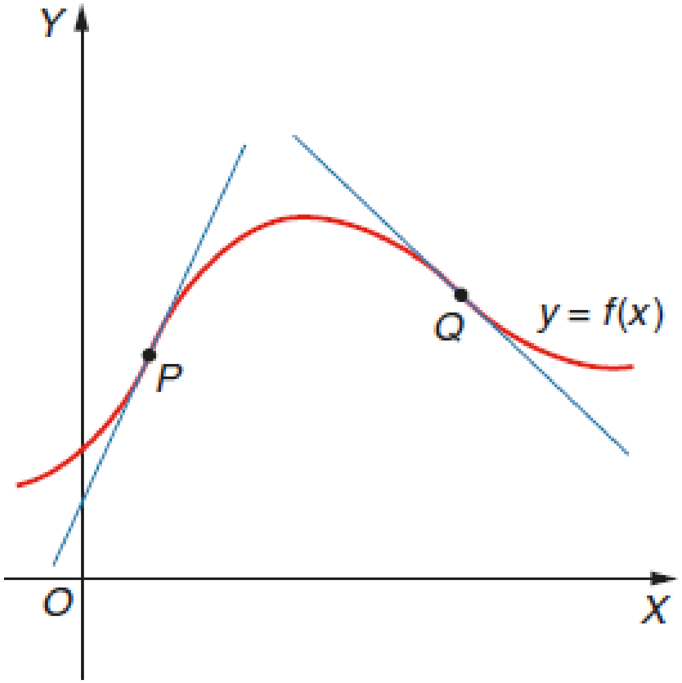
Concavidad hacia las *y* positivas



Concavidad hacia las *y* negativas



- Una función *f* tiene un punto de inflexión en un punto cuando en este punto cambia la concavidad de la función.



- Si una función f tiene su derivada segunda nula en un punto de abscisa x_0, y su derivada tercera en ese punto es distinta de cero, entonces la función f tiene un punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$.

  Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$

Cuando se anulan la segunda derivada, la tercera derivada, etc., en x_0, siendo el orden de la primera derivada no nula impar, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = x_0$:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \;\; f^{(n)}(x_0) \neq 0; \;\; n \text{ impar}$$

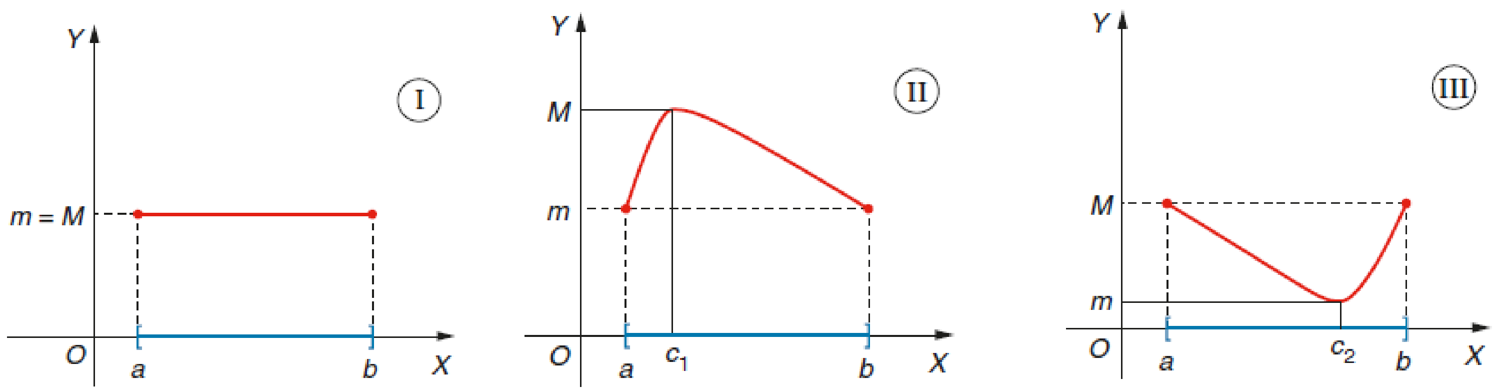
$$\Downarrow$$

$$f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$

6. Propiedades de las funciones derivables

6.1. Teorema de Rolle

- Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al abierto (a, b) de modo que la derivada en él se anula, $f'(c) = 0$.



10

Aplicaciones de las derivadas

6. Propiedades de las funciones derivables

6.2. Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado

- Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b), y tales que $g(a) \neq g(b)$.

  Entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo (a, b) de modo que en él se verifica:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

$$h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow 0 = f'(c)\,[g(b) - g(a)] - g'(c)\,[f(b) - f(a)]$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

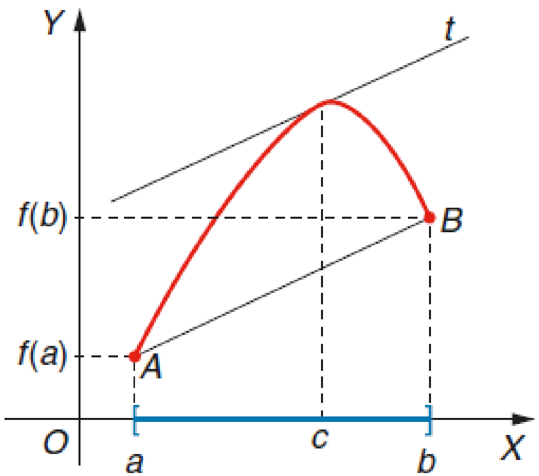
6. Propiedades de las funciones derivables

6.3. Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

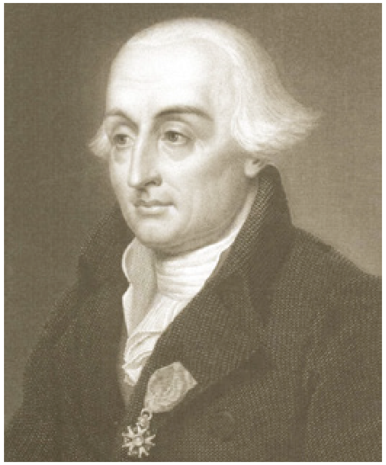
  Entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) de modo que en él se verifica:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$t \parallel AB$

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813)



7. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites

Casos de indeterminaciones						
$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

En esta unidad didáctica estamos en condiciones de resolver todos los tipos de indeterminaciones, incluidos los casos 0^0 y ∞^0, haciendo uso de las derivadas, mediante la regla de Bernoulli-L.Hôpital, más conocida como **regla de L.Hôpital.**

Caso $\frac{0}{0}$

- Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0.$
- En un cierto entorno reducido de x_0, $g(x) \neq 0$.
- Existen $f'(x)$ y $g'(x)$, que ni son cero ni infinito a la vez, en un entorno de x_0.
- Existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito o infinito.

Entonces se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

10 Aplicaciones de las derivadas

7. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites

A veces ocurre que en $x = x_0$ se anulan las funciones $f(x)$ y $g(x)$, así como las primeras derivadas, segundas, …, (n–1)-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$. y $g^{(n)}(x_0)$.

En este caso se aplica la **regla de L.Hôpital generalizada**, que equivale a aplicar la regla de L'Hôpital reiteradamente.

- **Regla de L'Hôpital generalizada**

  Si cuando x tiende a x_0 se anulan $f(x)$, $g(x)$ y sus respectivas derivadas primeras, segundas, …, $(n-1)$-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$, que ni son cero ni infinitas a la vez, entonces se verifica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

  Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

10 Aplicaciones de las derivadas

7. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites

Caso $\frac{\infty}{\infty}$

Este caso se resuelve igualmente mediante la regla de L.Hôpital y la regla de L.Hôpital generalizada, ya que ambas son también aplicables cuando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Caso $0 \cdot \infty$

Este caso se resuelve por la regla de L.Hôpital una vez transformado el límite correspondiente en uno del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Para ello podemos operar de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \; (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \; \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

10 Aplicaciones de las derivadas

7. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites

Caso $\infty - \infty$

Dividiendo numerador y denominador por $f(x) \cdot g(x)$, la indeterminación se transforma en una del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] \; \infty - \infty \; = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \; \frac{0}{0}$$

Casos 0^0, ∞^0 y 1^∞

Estas indeterminaciones aparecen en límites de la forma: $M = \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$

Se resuelven tomando logaritmos neperianos $\ln M = \ln\left\{ \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} \right\}$

$$\ln M = \lim_{x \to x_0} \left[g(x) \cdot \ln[f(x)] \right] = \lambda$$

Al calcular el límite, nos aparece una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que ya sabemos resolver. Por tanto, el límite buscado es:

$$\ln M = \lambda \quad \Rightarrow \quad M = e^\lambda = \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$$