DERIVADAS

FUNCIONES — la rapidez de cambio de la función en x_0 se mide con la →

TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

$$t_{vi}[x_0] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

esta se llama ↓

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DE ABSCISA x_0

$$f'(x_0) = D[f(x_0)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

relación con la continuidad →

- f derivable en x_0

  $\Downarrow$

  f continua en x_0
- el recíproco no es cierto

condición necesaria y suficiente →

DERIVADAS LATERALES

$\exists D[f(x_0)]$

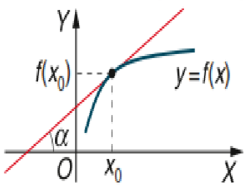
$\Updownarrow$

$\exists D[f(x_0^+)]$ y $\exists D[f(x_0^-)]$

y son iguales

geométricamente la derivada es la →

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE EN $[x_0, f(x_0)]$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

las ecuaciones de las rectas tangente y normal son →

$$t:\ y-f(x_0) = f'(x_0)\,(x-x_0)$$

$$n:\ y-f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

a partir de ella se define la →

FUNCIÓN DERIVADA

$$f'(x) = D[f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si f es derivable se define la → **DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN**

$$dy = f'(x)\cdot dx$$

derivadas de orden superior → **DERIVADAS SUCESIVAS**

cálculo de las derivadas → **REGLAS DE LAS DERIVADAS**

operaciones con las derivadas →

- $D[f+g] = D[f] + D[g]$
- $D[tf] = t\cdot D[f]$
- $D[f\cdot g] = D[f]\cdot g + f\cdot D[g]$
- $D\left[\dfrac{f}{g}\right] = \dfrac{D[f]\cdot g - f\cdot D[g]}{g^2}$
- $D[f\circ g] = D[f(g)]\cdot D[g]$

TABLA DE DERIVADAS INMEDIATAS

DERIVADAS		
FUNCIÓN	**FUNCIÓN SIMPLE**	**FUNCIÓN COMPUESTA**
Función constante	$D[K] = 0, \quad K \in \mathbb{R}$	
Función identidad	$D[x] = 1$	
Función potencial	$D[x^a] = a \cdot x^{a-1}$	$D[f^a] = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$
Función irracional	$D\left[\sqrt[n]{x}\right] = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\left[\sqrt[n]{f}\right] = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Función exponencial	$D[e^x] = e^x$	$D[e^f] = e^f \cdot f'$
	$D[a^x] = a^x \cdot \ln a$	$D[a^f] = a^f \cdot \ln a \cdot f'$
Función logarítmica	$D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$	$D[\ln f] = \dfrac{f'}{f}$
	$D[\log_a x] = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$D[\log_a f] = \dfrac{f'}{f \cdot \ln a}$
Función exponencial potencial	$D[f^g] = f^g \cdot \ln f \cdot g' + g \cdot f^{g-1} \cdot f'$	
Función seno	$D[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$D[\operatorname{sen} f] = \cos f \cdot f'$
Función coseno	$D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$D[\cos f] = -\operatorname{sen} f \cdot f'$
Función tangente	$D[\operatorname{tg} x] = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D[\operatorname{tg} f] = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$
Función arco seno	$D[\operatorname{arcsen} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D[\operatorname{arcsen} f] = \dfrac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$
Función arco coseno	$D[\arccos x] = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D[\arccos f] = \dfrac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}}$
Función arco tangente	$D[\operatorname{arctg} x] = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$D[\operatorname{arctg} f] = \dfrac{f'}{1 + f^2}$

ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ c) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ d) $k(x) = \sqrt{x+5}$

2. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 2x - x^2$; $D\,[f\,(1)]$ b) $f(x) = \sqrt{x-3}$; $f\,'(7)$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$; $D[f(3)]$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$:

   a) $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4. ¿Para qué valores de a y b cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

   a) $f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+a & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2+bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^3-x & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos cuyas abscisas se indican:

   a) $y = 2x^3 + x$; $x_0 = 0$ b) $y = \sqrt{25-x^2}$; $x_0 = 3$ c) $y = \dfrac{3x}{1-x}$; $x_0 = 2$

6. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

7. Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$ sabiendo que la recta tangente en el punto $x = 1$ es la recta $y = -2x$.

8. Dada la función $y = x^2 - 3x + 4$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella sea paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = 6$.

9. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en un punto cualquiera $x = a$. Halla el valor de a para que dicha recta pase por el origen de coordenadas (exterior a la curva).

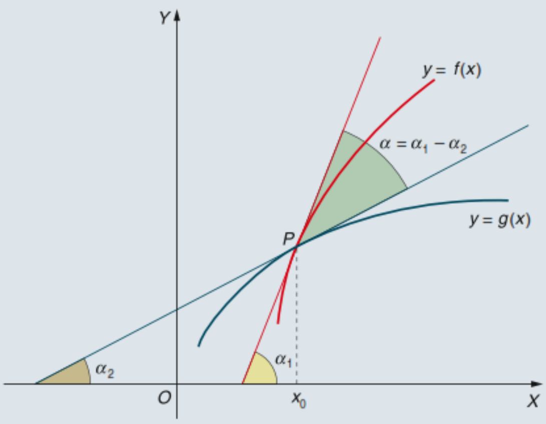
10 Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.

   Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

   a) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x+2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x+1 \end{cases}$

11. Calcula el ángulo que forman las hipérbolas $xy = 2$ y $x^2 - y^2 = 3$ en el punto de corte que tiene abscisa positiva.



12. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D[x^5]$

b) $D[x^4 \cdot x^3]$

c) $D\left[\left(x^3-2\right)^5\right]$

d) $D\left[(4x)^{1/4}\right]$

e) $D[x^3 \cdot 3^x]$

f) $D\left[(x+1)^2 \cdot (x-1)^3\right]$

g) $D[2^x \cdot \ln x]$

h) $D[(e^{3x}+2)^4]$

i) $D[\ln(3-2x^2)^5]$

j) $D\left[\dfrac{4}{(x^2+2x^3)^5}\right]$

k) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{5-4x^3}}\right]$

l) $D\left[(2x+4)\cdot\sqrt{2x-4}\right]$

m) $D\left[\dfrac{e^x}{x^2}\right]$

n) $D\left[\dfrac{x^3}{e^x}\right]$

ñ) $D\left[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}\right]$

o) $D[\cos(4x)]$

p) $D[\text{sen}^4(2x)]$

q) $D[\cos(x^4)]$

13. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]$

b) $D\left[\dfrac{\text{sen}(x-1)}{\text{sen}(x+1)}\right]$

c) $D[\ln \text{tg}^3 x]$

d) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

e) $D[\cos\{\text{sen}(\cos x)\}]$

f) $D\left[\dfrac{x^2 \cdot 2^{3x}}{e^{3x}}\right]$

g) $D[\cos^3(2x)\cdot\text{sen}^2(3x)]$

h) $D\left[(x-1)^x\right]$

i) $D[\cos^2(x^3)]$

j) $D[x^3+\cos(x^2)]$

k) $D[\ln^3(\ln x)]$

l) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)\right]$

m) $D\left[\text{arctg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]$

n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$

ñ) $D[\text{arctg}(\cos x)]$

o) $D[(\ln x)^x]$

p) $D[\text{arcsen}\sqrt{x}]$

q) $D\left[\sqrt{\dfrac{1-5x}{1+5x}}\right]$

r) $D\left[(1+x)\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$

s) $D\left[\text{arctg}\sqrt{x+1}\right]$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{2}{2+x}\right)+\dfrac{2}{2+x}\right]$

u) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)\right]$

v) $D[\text{arcsen}(\text{tg}\, x)]$

w) $D\left[(\text{sen}\, x)^{2\cos x}\right]$

14. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f(x) = 3^{2x}$, $f'''(x)$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$, $g^{(4)}(x)$

c) $h(x) = \ln(2x+3)$, $h^{(5)}(x)$

d) $j(x) = \text{sen}\, 4x$, $j^{(10)}(x)$

15. Obtén las derivadas enésimas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(x+2)$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$

c) $h(x) = e^x - e^{-x}$

d) $i(x) = 4^{-x}$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $k(x) = \text{sen}\, x$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Estudia la derivabilidad de las funciones:

   a) $f(x) = |x-2| + |x|$ b) $g(x) = e^{|x|}$

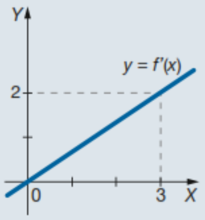
2. Estudia el valor que ha de tener el parámetro a para que la función $y = f(x)$ sea derivable en $x = 1$.

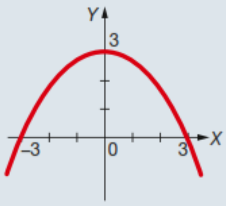
$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Calcula a y b para que la función $y = f(x)$ sea derivable para cualquier número real.

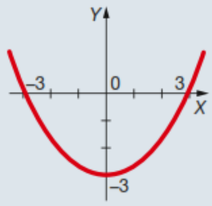
$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+3 & \text{si } x \le 2 \\ e^{2-b} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4. La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.

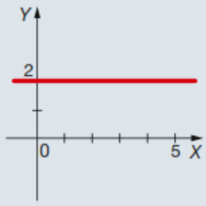




(A)



(B)



(C)

   a) Obtén la expresión analítica de $f'(x)$.

   b) Indica cuál de las gráficas (A), (B) o (C) corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{a}{x^2}$. ¿Cuánto debe valer a para que las tangentes a dicha curva en los puntos de abscisas $x = a$ y $x = -a$ se corten perpendicularmente?

6. Calcula la tangente a la curva $y = \ln(2x)$ que pasa por el origen de coordenadas.

7. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las hipérbolas $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

8. ¿En qué punto o puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?

9. Encuentra la derivada enésima de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ c) $h(x) = \cos(2x)$

10. Si P es un punto cualquiera de la gráfica de $xy = 1$, prueba que el triángulo formado por la recta OP, la tangente a la gráfica en el punto P y el eje OX es isósceles.

11. La arista de un cubo es de 25 cm. Por efecto de la dilatación, cada arista aumenta en 0,02 mm. ¿Cuánto aumentará su área? ¿Cuánto aumentará su volumen?

12. El lado de un triángulo equilátero crece a razón de 10 cm por minuto. Halla a que velocidad crece su área cuando el lado mide $8\sqrt{3}$ cm.

13. Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad de 3 cm/s, halla la velocidad a la que aumenta su área cuando el lado vale 12 cm. Halla el valor del lado cuando el área crece a 60 cm^2/s.