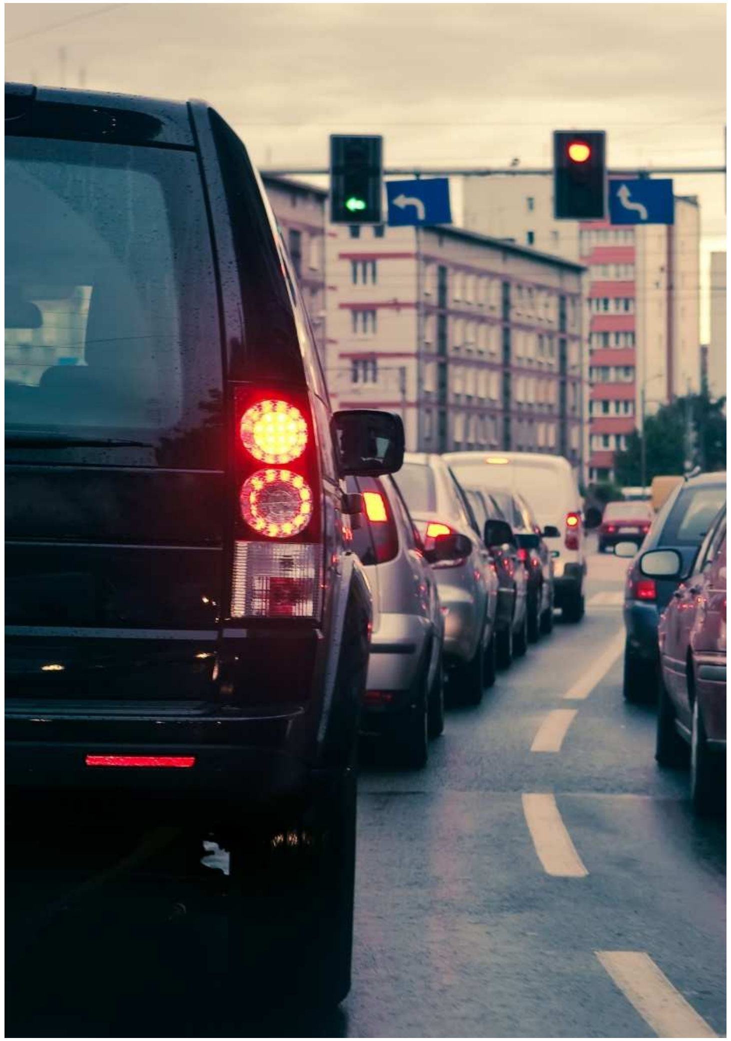
2 Determinantes



Determinantes

1. Determinantes de orden 2 y 3

- Para una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A al número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

- **Regla de Sarrus:** el desarrollo del determinante de una matriz de orden 3 es igual a la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y los de las líneas paralelas a ella, multiplicados por el elemento del vértice opuesto, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria y el producto de los elementos de las líneas paralelas a ella, multiplicados por el elemento del vértice opuesto.

2

Determinantes

2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

2.1. Menor complementario

- Para una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij}, y lo representamos por α_{ij}, al determinante de la matriz cuadrada de orden $n - 1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j.

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{13} y a_{32} son, respectivamente:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 32, \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15 \quad \text{y} \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

2 Determinantes

2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

2.2. Adjunto y matriz adjunta

- Para una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, se llama **adjunto** del elemento a_{ij}, y lo representamos por A_{ij}, al menor complementario de a_{ij}, anteponiendo el signo *más* o el signo *menos* según la suma de los subíndices, $i + j$, sea par o impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de una matriz cuadrada A se llama **matriz adjunta** de A y se denota por Adj (A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \quad \alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \quad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Los adjuntos de la matriz A son:

$A_{11} = -3 \quad A_{12} = 6 \quad A_{13} = -3$

$A_{21} = 6 \quad A_{22} = -12 \quad A_{23} = 6$

$A_{31} = -3 \quad A_{32} = 6 \quad A_{33} = -3$

que son los elementos de la matriz adjunta de la matriz A:

$$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Determinantes

2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

2.3. Desarrollo de un determinante por adjuntos

- El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos respectivos:
  - $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$
  - $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

En la práctica, antes de calcular un determinante utilizando este procedimiento, conviene aplicar el **método de Chío** o método de hacer ceros.
Este método consiste en hacer cero el mayor número posible de elementos de una línea utilizando las propiedades de los determinantes, y posteriormente desarrollar el determinante por los elementos de esta línea.

1. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

2. Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, k \cdot F_i, \ldots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

$$\det(C_1, C_2, \ldots, t \cdot C_j, \ldots, C_n) = t \cdot \det(C_1, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

$$\left.\begin{array}{c}\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 10\\ 4 & 0 & 20\\ 0 & 3 & 30\end{vmatrix}} = 10 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}}\\ \det(C_1, C_2, 10 \cdot C_3) = 10 \cdot \det(C_1, C_2, C_3)\end{array}\right\} -180 = 10 \cdot (-18)$$

3. Si los elementos de una línea de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las líneas excepto dicha línea cuyos sumandos pasan, respectivamente, a cada uno de los determinantes:

$$\det(F_1, \ldots, F_i + F'_i, \ldots, F_n) = \det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n) + \det(F_1, \ldots, F'_i, \ldots, F_n)$$

$$\left.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2+5} & 3 \\ 4 & \boxed{0+7} & -1 \\ 0 & \boxed{3+6} & 5 \end{vmatrix}}_{\det(C_1,\, C_2 + C'_2,\, C_3)} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \end{vmatrix}}_{\det(C_1,\, C_2,\, C_3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \boxed{5} & 3 \\ 4 & \boxed{7} & -1 \\ 0 & \boxed{6} & 5 \end{vmatrix}}_{\det(C_1,\, C'_2,\, C_3)}\right\} 12 = -1 + 13$$

4. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

2 Determinantes

3. Propiedades de los determinantes. Método de Chío

5. Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo:

$$\det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_j, \ldots, F_n) = -\det(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

6. Si una matriz cuadrada tiene dos líneas iguales o proporcionales su determinante es cero.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = 0 \qquad\qquad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\det(F_1, F_2, F_2) = 0 \qquad\qquad \det(C_1, 4C_1, C_3) = 0$$

7. Si los elementos de una línea de una matriz cuadrada son combinación lineal de las líneas restantes, es decir, son el resultado de sumar los elementos de otras líneas multiplicadas por números reales, su determinante es cero.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}}_{\det(F_1, F_2, -F_1 + 2F_2) = 0} = 0$$

8. Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = \det(F_1, F_2, \ldots, aF_1 + bF_2 + F_i, \ldots, F_n)$$

Consecuencia inmediata de esta propiedad es que si una matriz tiene una línea de ceros su determinante es cero.

- El **método de Chío** consiste en hacer cero el mayor número posible de elementos de una línea utilizando las propiedades de los determinantes y, posteriormente, desarrollar el determinante por los adjuntos de los elementos de esa línea en la que hemos hecho ceros.

- **Por regla de Sarrus:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

- **Por método de Chío:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

4. Cálculo de la matriz inversa por determinantes

4.1. Condición de inversibilidad

Recordamos que la **matriz inversa** de una matriz cuadrada *A* de orden *n* es la matriz A^{-1} de orden *n* que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman **matrices regulares,** y las que no tienen inversa **matrices singulares.**

Antes de calcular la matriz inversa de una dada hemos de asegurarnos de que efectivamente existe una matriz inversa. Para ello utilizamos la siguiente propiedad:

$$\left.\begin{array}{l} \exists A^{-1} \text{ o} \\ A \text{ es regular} \end{array}\right\} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

4. Cálculo de la matriz inversa por determinantes

4.2. Cálculo de la matriz inversa

Una vez que nos hemos asegurado de la existencia de la matriz inversa, calculamos esta mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left[\text{Adj}\,(A)\right]^{t} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^{t})$$

Las **propiedades** más importantes relativas a la **matriz inversa** son:

1. Si existe A^{-1} es única.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

5. Cálculo del rango de una matriz por determinantes

5.1. Menor de orden *k*

- Se llama menor de orden k de una matriz $A_{m \times n}$ al determinante de orden k que está formado por los elementos que pertenecen a k filas y a k columnas de la matriz A.

- El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo que podemos obtener de esta matriz.

Las **propiedades** más características relativas al rango de una matriz son:

- Si el rango de una matriz es *k*, entonces todos los menores de orden superior a *k* son nulos.
- Si el rango de una matriz es *k*, las *k* filas y *k* columnas que forman el menor de orden *k* no nulo son linealmente independientes, y se llaman líneas principales.
- Las líneas no principales de una matriz dependen linealmente de las líneas principales.

2 Determinantes

6. Matrices y criptografía

Para trasmitir un mensaje de forma cifrada se siguen los siguientes pasos:

1.º Se asigna un número a cada letra de forma aleatoria.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
15	3	19	4	9	5	18	11	20	8	26	12	23	7

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
22	1	27	13	17	2	24	14	6	25	10	21	16

M	A	T	R	I	C	E	S
23	15	24	17	20	19	9	2

2.º Para proteger más el mensaje, se define la llamada matriz de cifrado, que debe ser regular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ con } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.º Para enviar de forma cifrada la palabra MATRICES, se toma la secuencia 23 15 24 17 20 19 9 2 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 91 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 97 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}$$

4.º Para descifrarlo tras la recepción, se multiplica por la inversa de la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

23	15	24	17	20	19	9	2
M	A	T	R	I	C	E	S