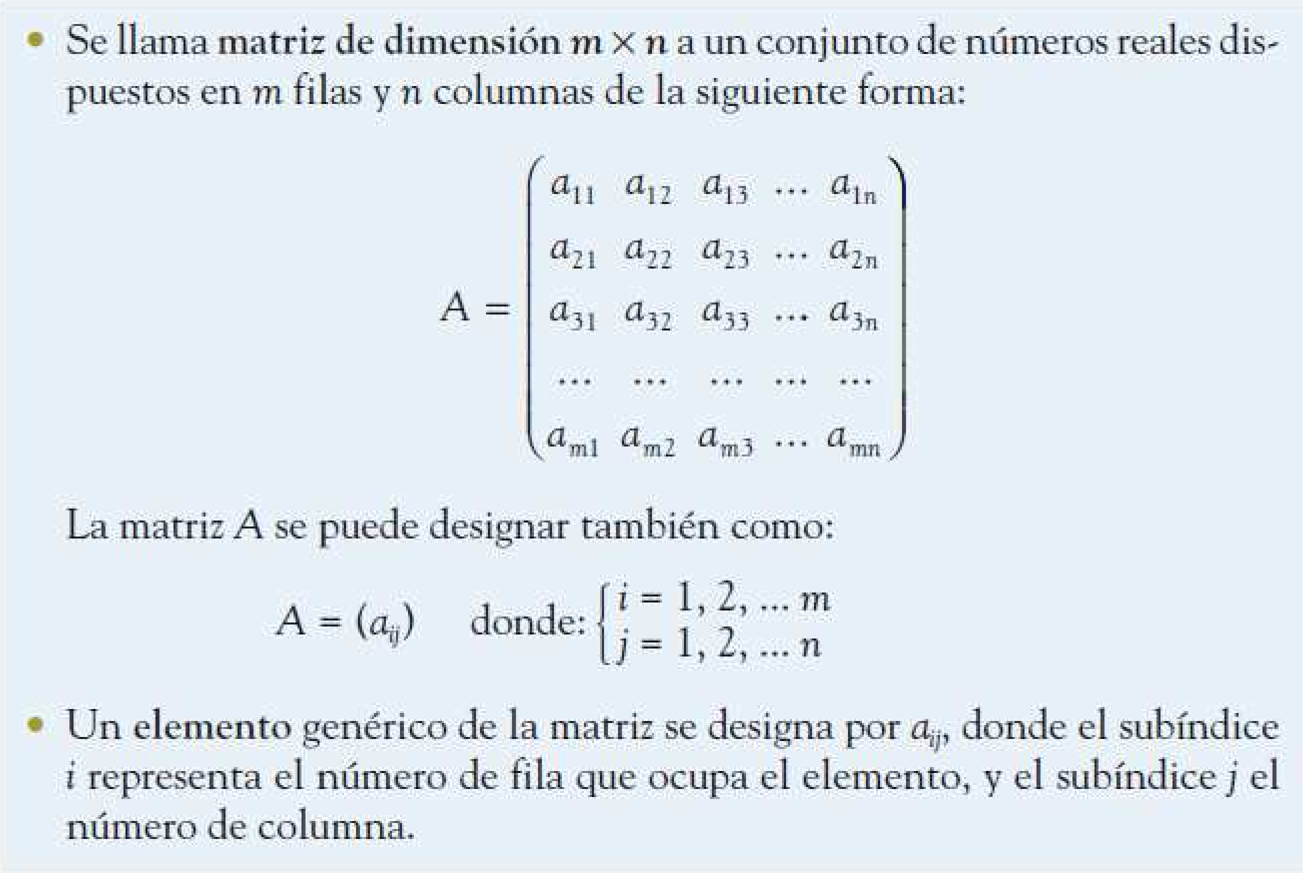
1 Matrices

1

Matrices

1. Matrices

1.1. Conjuntos de matrices



- Se llama **matriz de dimensión $m \times n$** a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz A se puede designar también como:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{donde:} \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

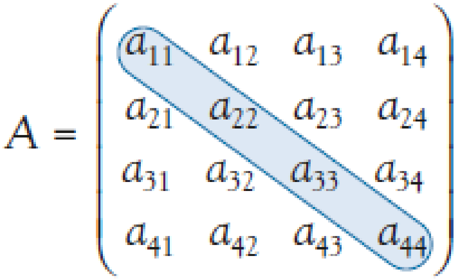
- Un elemento genérico de la matriz se designa por a_{ij}, donde el subíndice i representa el número de fila que ocupa el elemento, y el subíndice j el número de columna.

1. Matrices

1.1. Conjuntos de matrices

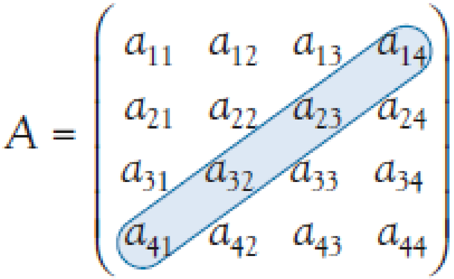
- El conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ se denota por: $M_{m \times n}$
- El conjunto de matrices de dimensión $n \times n$, también llamadas de **orden** n, se denota por: M_n

Las matrices de este conjunto se llaman **matrices cuadradas** y en ellas definimos:
— la **diagonal principal** formada por los elementos a_{ii} ;
— la **diagonal secundaria** formada por los elementos de la forma a_{ij} que cumplen $i + j = n + 1$.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Matrices

2. Tipos de matrices

2.1. Matrices rectangulares

Matriz rectangular es aquella que tiene distinto número de filas que de columnas ($m \neq n$).

Matriz fila es toda matriz rectangular con una sola fila, de dimensión $1 \times n$.

Matriz columna es toda matriz rectangular con una sola columna, de dimensión $m \times 1$.

Matriz nula es una matriz con todos sus elementos nulos. Se denota por 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz rectangular } 2 \times 3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz columna } 2 \times 1$$

$$B = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 2) \leftarrow \text{matriz fila } 1 \times 4$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz nula } 3 \times 2$$

Matrices

2. Tipos de matrices

2.2. Matrices cuadradas

Matriz cuadrada de orden *n* es aquella que tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).

Matriz triangular es aquella que tiene nulos todos los términos situados por debajo (triangular superior) o por encima (triangular inferior) de la diagonal principal.

Matriz diagonal es toda matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros.

Matriz escalar es toda matriz diagonal en la que todos los términos de la diagonal principal son iguales.

Matriz unidad es la matriz escala

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz cuadrada de orden 2}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz escalar de orden 2}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz triangular superior de orden 3}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz unidad de orden 3}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz diagonal de orden 3}$$

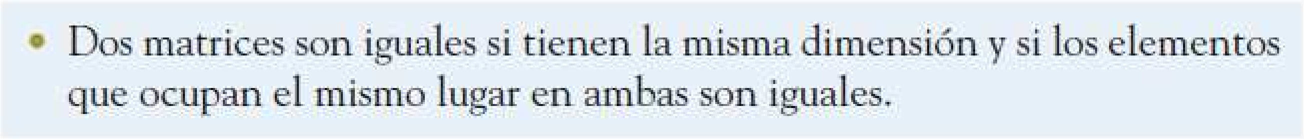
1

Matrices

3. Operaciones con matrices

3.1. Igualdad de matrices

De igual forma que en cursos anteriores se hizo en conceptos como polinomios, sucesión, función, etc., al definir la igualdad entre estos objetos matemáticos, establecemos la **igualdad de matrices:**



- Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

3. Operaciones con matrices

3.2. Suma de matrices

- Para dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión $m \times n$, la suma de A y B es la matriz de la misma dimensión $m \times n$ dada por:

  $$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

  Es decir, la suma de $A + B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

1

Matrices

4. Producto de matrices

- El producto de dos matrices, $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ de dimensión $n \times p$, es la matriz $A \cdot B$ de dimensión $m \times p$ dada por:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad \text{o bien} \quad (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik}) \text{ con:}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Es decir, cada elemento c_{ik} se obtiene multiplicando ordenadamente los elementos de la fila i-ésima de la primera matriz por los elementos de la columna k-ésima de la segunda matriz y sumando los resultados.

$$\underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Propiedades del producto de matrices cuadradas

- El producto de matrices cuadradas es **asociativo:**

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- El producto de matrices cuadradas de orden n posee como **elemento neutro** la matriz unidad o identidad de orden n, I, ya que:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

- El producto de matrices cuadradas es **distributivo respecto de la suma** de matrices:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

- El producto de matrices cuadradas es, en general, **no conmutativo:**

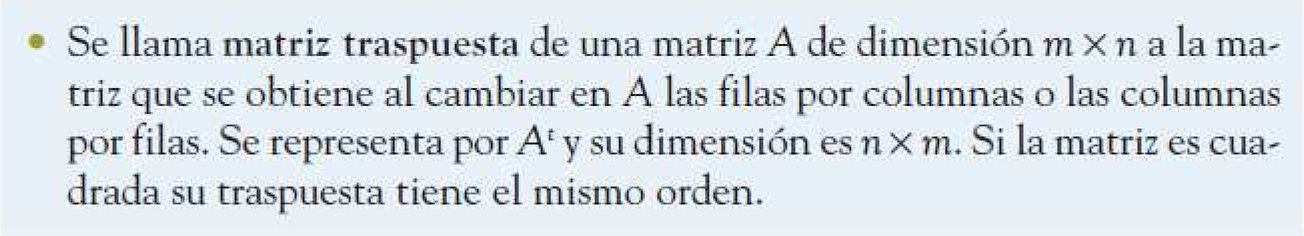
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

En el caso en el que existan dos matrices A y B que cumplan que $AB = BA$, se dice que A y B **conmutan**.

1

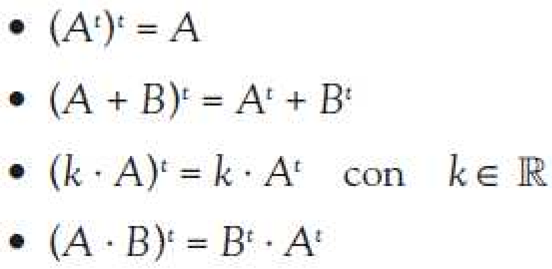
Matrices

5. Trasposición de matrices. Matriz simétrica y antisimétrica



- Se llama **matriz traspuesta** de una matriz A de dimensión $m \times n$ a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por columnas o las columnas por filas. Se representa por A^t y su dimensión es $n \times m$. Si la matriz es cuadrada su traspuesta tiene el mismo orden.

Las principales propiedades de la trasposición de matrices son:

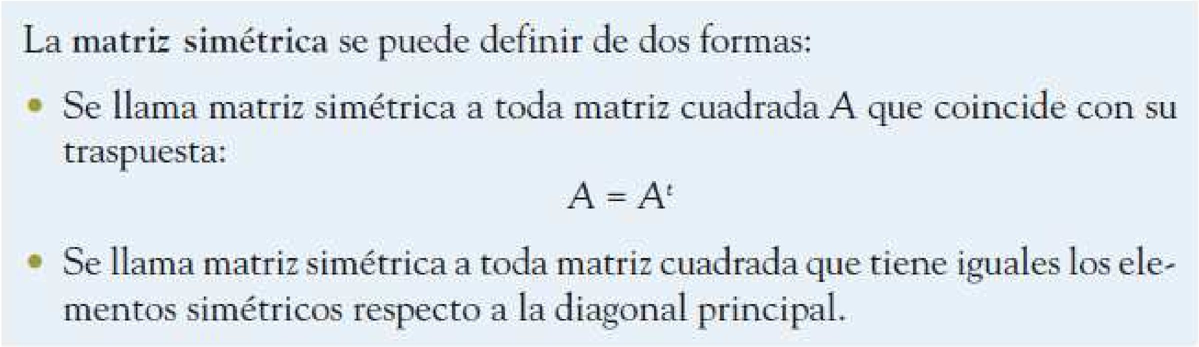


- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

1

Matrices

5. Trasposición de matrices. Matriz simétrica y antisimétrica



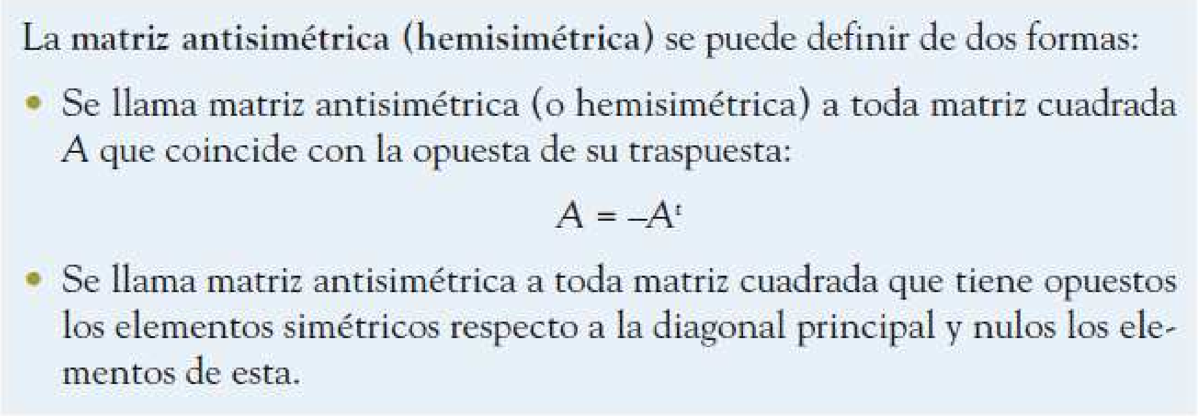
La **matriz simétrica** se puede definir de dos formas:

- Se llama matriz simétrica a toda matriz cuadrada A que coincide con su traspuesta:

$$A = A^t$$

- Se llama matriz simétrica a toda matriz cuadrada que tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$$



La **matriz antisimétrica (hemisimétrica)** se puede definir de dos formas:

- Se llama matriz antisimétrica (o hemisimétrica) a toda matriz cuadrada A que coincide con la opuesta de su traspuesta:

$$A = -A^t$$

- Se llama matriz antisimétrica a toda matriz cuadrada que tiene opuestos los elementos simétricos respecto a la diagonal principal y nulos los elementos de esta.

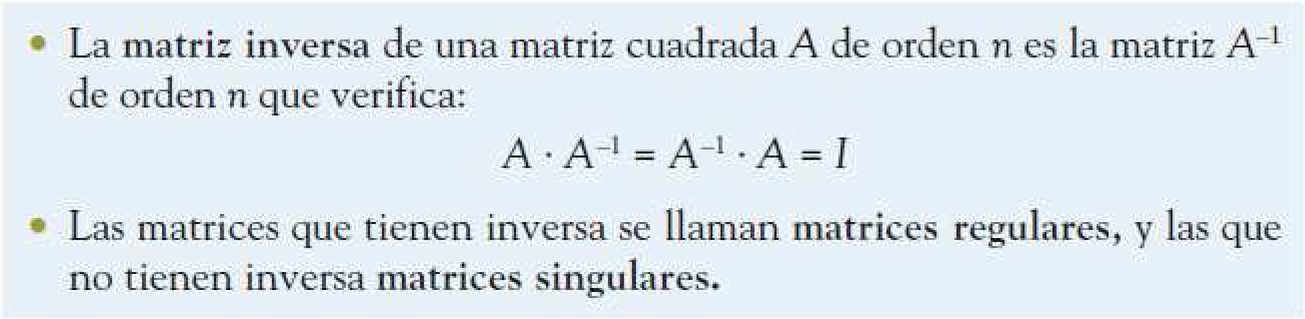
$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & r \\ -y & -t & 0 & s \\ -z & -r & -s & 0 \end{pmatrix}$$

1

Matrices

6. Matriz inversa

6.1. Cálculo de la matriz inversa



- La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n es la matriz A^{-1} de orden n que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- Las matrices que tienen inversa se llaman **matrices regulares**, y las que no tienen inversa **matrices singulares**.

Para calcular la matriz inversa de una matriz regular podemos utilizar dos procedimientos:

- **Mediante la definición**

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

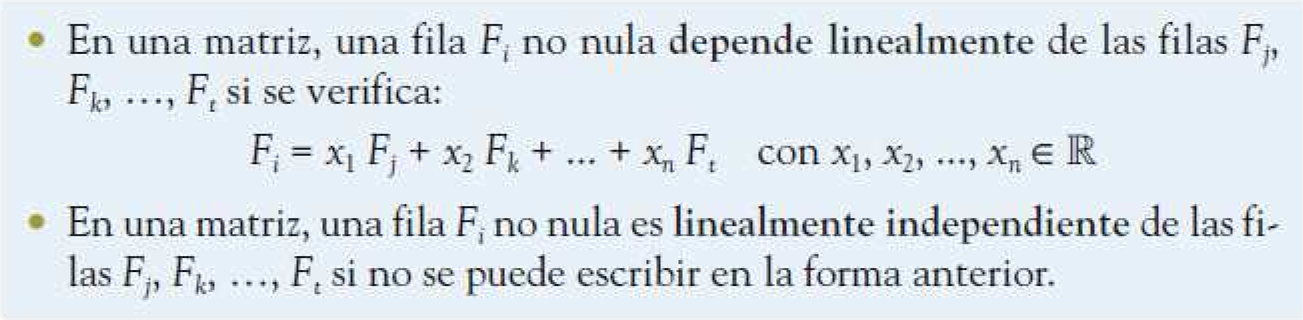
- **Método de Gauss-Jordan**

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{operaciones elementales}} (I \mid A^{-1})$$

1

Matrices

7. Rango de una matriz



- En una matriz, una fila F_i no nula depende linealmente de las filas F_j, F_k, …, F_t si se verifica:

$$F_i = x_1 F_j + x_2 F_k + \dots + x_n F_t \quad \text{con } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

- En una matriz, una fila F_i no nula es linealmente independiente de las filas F_j, F_k, …, F_t si no se puede escribir en la forma anterior.

Un concepto importante asociado a una matriz es su **rango** o característica, que está relacionado con el número de filas o columnas linealmente independientes.

- El rango o característica de una matriz es el número de filas o de columnas no nulas y linealmente independientes que tiene esa matriz.

Para **calcular el rango de una matriz** utilizamos las operaciones elementales por filas, ya que dejan invariante el rango de la matriz resultante. Las filas que dependen de otras se reducen a filas nulas mediante estas transformaciones.

1 Matrices

8. Las matrices en la vida real

En muchas situaciones de la vida real se nos presentan gran cantidad de datos. Para cuantificar la información y operar con ella resulta muy útil el uso de las matrices y sus operaciones.

TIENDA A

$$\text{Marcas}\;\begin{array}{cc} \text{Talla}\rightarrow & \begin{array}{cccccc} 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Puma}\rightarrow \\ \text{León}\rightarrow \\ \text{Zorro}\rightarrow \\ \text{Lobo}\rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

TIENDA B

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} & \leftarrow\text{Talla} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow\text{Puma} \\ \leftarrow\text{León} \\ \leftarrow\text{Zorro} \\ \leftarrow\text{Lobo} \end{array} \end{array}\;\text{Marcas}$$

$$B \cdot A = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} R\ \text{reducido}\rightarrow \\ N\ \text{normal}\rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75 \\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{1.º nivel} & \text{2.º nivel} & \text{3.º nivel} & \text{4.º nivel} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow\text{1.º nivel} \\ \leftarrow\text{2.º nivel} \\ \leftarrow\text{3.º nivel} \\ \leftarrow\text{4.º nivel} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{inglés I} & \text{alemán A} \end{array} & \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow R \\ \leftarrow N \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ I & A \end{array} & \end{array}$$