ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Una matriz A se llama antisimétrica cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz A de orden 2 que sea antisimétrica. Calcula A^2, A^4 y A^{33}.

Para una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la igualdad $A^t = -A$ permite obtener o relacionar los elementos a, b, c, d. La anterior igualdad nos permite concluir:

$$A^t = -A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

Por tanto, todas las matrices antisimétricas de orden 2 son de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos las potencias de A indicadas y obtenemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -b^2 I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-b^2 I) \cdot (-b^2 I) = b^4 I \cdot I = b^4 I$$

$$A^8 = b^8 I^2 = b^8 I, \quad A^{12} = b^{12} I^2 = b^{12} I, \ \ldots, \ A^{32} = b^{32} I$$

Por tanto, $A^{33} = A^{32} \cdot A = b^{32} I \cdot A = b^{32} A = b^{32} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b^{33} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tres familias van a una heladería. La primera pide dos helados grandes, uno mediano y uno pequeño; la segunda pide uno grande, dos medianos y dos pequeños, y la tercera familia pide dos grandes y tres pequeños.

a) Expresa esta información mediante una matriz 3 × 3.

b) Si la primera familia paga 4,75 euros, la segunda 5 euros y la tercera 5,25 euros, calcula el precio de un helado grande, el de uno mediano y el de uno pequeño.

a) La siguiente matriz muestra la información del problema, en las filas el número de helados de cada familia y en las columnas el tipo de helados:

$$A = \begin{array}{c} 1.^a \rightarrow \\ 2.^a \rightarrow \\ 3.^a \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ G & M & P \end{array} \end{array}$$

b) Llamando x, y, z al precio de cada helado grande, mediano y pequeño, respectivamente, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4{,}75 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 3z = 5{,}25 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \text{ euros} \\ y = 1 \text{ euro} \\ z = 0{,}75 \text{ euros} \end{cases}$$

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **Se pide:**

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, **siendo** I **la matriz unidad y** O **la matriz nula.**

b) Calcula razonadamente A^{10}.

a) Comprobamos que es cierta la igualdad $A^3 + I = O$. Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $A^3 = -I$, se cumple $A^3 + I = O$.

b) Tenemos que $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$.

Sea M **la matriz** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz identidad de orden 3. Calcula la matriz** J **tal que** $M = J + I$. **Calcula también las matrices** J^2, J^3 **y** J^{1994}.

$$J = M - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las sucesivas potencias de J son:

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las restantes potencias dan por resultado la matriz nula y, por tanto, $J^{1994} = J^{1991} \cdot J^3 = 0$.

Halla la matriz $X^2 + Y^2$ **si** X **e** Y **son dos matrices cuadradas, que verifican:**

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ y resolvemos el sistema matricial $\begin{cases} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$.

Utilizando el método de reducción, obtenemos las soluciones:

$$X = 2A - 3B, \quad Y = -3A + 5B$$

Sustituyendo A y B por las correspondientes matrices:

$$X = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = -3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando para obtener $X^2 + Y^2$, obtenemos:

$$X^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y^2 = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \qquad X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de Bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: «¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes».

   Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y él mismo; C opina que A, B y D; D opina que él mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

2. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ d & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 4 \\ 5 & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B + C$ c) $2A + B - 3C$ d) $AB - AC$ e) $2AB - 3AC + 4BC$

4. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas X, Y, Z, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Las miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \end{array}$$

   El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y, en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

5. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

$$a)\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad c)\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:

   a) $(A^t)^t$ b) $(A + B)^t = A^t + B^t$ c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ d) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

9. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

11. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

12. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss-Jordan:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:

a) $X \cdot A + 2B = C$ b) $A \cdot X - B = C$ c) $A \cdot X \cdot B = C$

15. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2×4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

18. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

   a) Construye la matriz de influencias: M.

   b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

   c) Interpreta la suma de las filas de M y de sus columnas.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$:

   a) Determina el valor de los parámetros a y b para que se cumpla $A \cdot B = B \cdot A$.

   b) Determina el valor de a para el cual se verifica $A^2 = A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, determina x para que se verifique la ecuación $A^2 - 6A + 5I = O$, donde O es la matriz cuyos elementos son nulos.

4. Un investigador médico estudia la difusión de un virus en una población de 1 000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80 % de que un cobaya infectado venza al virus y un 10 % de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

5. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de Ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiarán más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evoluciona el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

6. Encuentra las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Calcula, razonando el procedimiento, la matriz A^{17}, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1 000 estanterías grandes y 8 000 pequeñas de tipo A; 8 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo B, y 4 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.

   a) Representa esta información en dos matrices.

   b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz B que cumpla $A + B = A \cdot B$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, los valores a y b que verifican $A \cdot B \cdot C = A^t \cdot C$ son:

   a) $a = 1$ y $b = 2$ b) $a = 2$ y $b = 2$ c) $a = 2$ y $b = 1$

2. El elemento a_{11} de la matriz X que cumple $X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ es:

   a) $a_{11} = -1$ b) $a_{11} = 0$ c) $a_{11} = 1$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz X que cumple $B \cdot X = A + B$ es:

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz X que cumple $A \cdot X \cdot A = I$ es:

   a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. El valor de k para que el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & k \end{pmatrix}$ es igual a 2 es:

   a) $k = -1$ b) $k = 0$ c) $k = 1$