DETERMINANTES

ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

- **Calcula el valor del determinante** $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$.

Sumamos todas las columnas y colocamos el resultado en la primera columna. Restamos de todas las filas la primera y después lo desarrollamos por la primera columna, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a+1$$

- **Resuelve la ecuación det $(A - xI) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, I la matriz unidad de dimensión 3, y $x \in \mathbb{R}$ la incógnita.**

La ecuación a resolver es:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 4 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos la ecuación $(1-x)\,[(2-x)^2 - 4] = 0$. Operamos y obtenemos $-x^3 + 5x^2 - 4x = 0$; y factorizando: $x(x-1)\,(x-4) = 0$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$.

- **Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Halla el valor o valores de a para los que la matriz A no tiene inversa. Halla A^{-1} para $a = 2$.**

Sabemos que una matriz no tiene inversa si su determinante es nulo. El determinante de la matriz A es det $A = 1 - a^2$. Dicho determinante se anula para $a = 1$ y $a = -1$.

Por tanto, la matriz A no tiene inversa si a vale 1 o -1. Para los otros valores de a existe la matriz inversa de A.

Si $a = 2$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora calculamos A^{-1} a través de las siguientes matrices:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\text{Adj}\,(A^t)\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

- **Determina los valores de m que anulan el determinante** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$.

Desarrollando el determinante por la regla de Sarrus y simplificando, obtenemos $3m + 1$. La expresión anterior, y por tanto el determinante, se anula para $m = \frac{-1}{3}$.

Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3 = I$ (matriz identidad). ¿Cuánto vale det A? Si $A^n = I$, ¿cuánto vale det A?

Utilizando la propiedad de los determinantes relativa a la multiplicación de matrices, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, obtenemos:

- $\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = \left(\det(A)\right)^3$, y como $\det(A^3) = \det I = 1$, $\left(\det(A)\right)^3 = 1$ y $\det(A) = 1$.
- En el caso $A^n = I$, $\left(\det(A)\right)^n = 1$ y $\det(A)$ es 1 o -1 si n es par y únicamente 1 si n es impar.

Determina, según los valores de a, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & a \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de ambas matrices utilizando menores complementarios:

a) Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$, el rango de A es, al menos, 2.

El determinante de A es $\det(A) = -a + 1$. Si a vale 1, el rango de A será 2. Para cualquier otro valor de a, el rango de la matriz A es 3.

b) Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de B es, al menos, 2.

Dos posibles menores de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 2a - 2$$

Si a vale 1, el rango de B es 2 y para cualquier otro valor de a, el rango de la matriz B es 3.

Halla el valor que debe tener x para que la matriz $A - x \cdot I$ sea la inversa de $\frac{1}{x} \cdot (A - I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz $A - x \cdot I$ es la inversa de $\frac{1}{x} \cdot (A - I)$ si se cumple:

$$(A - x \cdot I) \cdot \frac{1}{x} \cdot (A - I) = I \Rightarrow (A - x \cdot I)\ (A - I) = x \cdot I$$

Y operando, obtenemos:

$$A^2 - A \cdot I - x \cdot I \cdot A + x \cdot I \cdot I = x \cdot I \Rightarrow A^2 - A = x \cdot A$$

En esta última igualdad no podemos multiplicar por A^{-1}, pues $|A| = 0$, es decir, no existe A^{-1}.

Operando y despejando x, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2$$

ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

4. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ d $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

5. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

6. Demuestra, aplicando las propiedades de los determinantes, que la igualdad que sigue es cierta:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

7. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3, tal que su determinante es $\det(F_1, F_2, F_3) = 5$. Calcula:

a) $\det(2A)$ b) $\det(A^3)$ c) $\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2)$

8. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $A \cdot A^t = I$. Halla $\det(A)$.

9. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2 y F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $-F_1$?

10. Comprueba que el determinante que sigue es divisible por 5, sin calcularlo, a partir de las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de k para los cuales A no es invertible.

b) Para $k = 0$, calcula la matriz A^{-1}.

c) Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3×3 que verifica $B^2 = 16\,I$, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^t$, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?

b) Estudia el rango según los valores de a.

c) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X para que se cumpla la ecuación matricial $A \cdot X - 2 \cdot I = O$, siendo I y O las matrices unidad y nula, respectivamente.

6. a) Determina para qué valores de a la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b) Considerando la matriz A del apartado anterior con $a = -1$, resuelve la ecuación matricial $X \cdot A + B = C \cdot A$, donde:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Determina la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X - I = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -x \\ 0 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$ son:

   a) 1 y 3 b) −1 y 3 c) 1 y −3

2. Sea A una matriz 2×2 de columnas C_1 y C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2×2 de determinante 12. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $3C_2$, el valor del determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$ es:

   a) 1 b) 3 c) 16

3. Los valores de a para los que no existe la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2a+2 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ son:

   a) $a = 1$ y $a = -2$ b) $a = 1$ y $a = -3$ c) $a = -1$ y $a = 3$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; la matriz X que cumple $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ es:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. El valor de k para que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & k \end{pmatrix}$ sea 2 es:

   a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = -1$

■ 11. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31} si existen.

b) Calcula, si existen, los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31},

c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

■ 12. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

■ 13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

■ 14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando $a = 2$.

■ 15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

■ 16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.

■ 17. Determina para qué valores de a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es 3.

■ 18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2×2, es: 16 14 33 6 22 14 ¿Podrías hallar A?